

## 20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

### Часть 1. ФИПИ

**Задание 1.** Сократите дробь:

- |   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 1) $\frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$ | 3) $\frac{18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n-2}}$ | 5) $\frac{20^n}{2^{2n-2} \cdot 5^{n-2}}$ | 7) $\frac{75^n}{5^{2n-1} \cdot 3^{n-2}}$ |
| 2) $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-3}}$  | 4) $\frac{48^n}{4^{2n-1} \cdot 3^{n-3}}$ | 6) $\frac{12^n}{2^{2n-3} \cdot 3^{n-1}}$ | 8) $\frac{36^n}{3^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$ |

**Задание 2.** Найдите значение выражения при данном условии:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $31a - 4b + 55$ , если $\frac{a - 4b + 7}{4a - b + 7} = 8$    | 5) $28a - 7b + 40$ , если $\frac{2a - 5b + 7}{5a - 2b + 7} = 6$  |
| 2) $19a - 7b + 12$ , если $\frac{5a - 8b + 2}{8a - 5b + 2} = 3$  | 6) $39a - 15b + 25$ , если $\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$ |
| 3) $41a - 11b + 15$ , если $\frac{4a - 9b + 3}{9a - 4b + 3} = 5$ | 7) $11a - 7b + 21$ , если $\frac{4a - 5b + 6}{5a - 4b + 6} = 3$  |
| 4) $25a - 5b + 22$ , если $\frac{3a - 7b + 6}{7a - 3b + 6} = 4$  | 8) $61a - 11b + 50$ , если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$ |

**Задание 3.** Решите уравнение:

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$   | 9) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$    |
| 2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ | 10) $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$   |
| 3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ | 11) $x^3 + 7x^2 = 4x + 28$   |
| 4) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$   | 12) $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$   |
| 5) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$   | 13) $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$  |
| 6) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$ | 14) $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$   |
| 7) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$   | 15) $x^3 + 6x^2 = 4x + 24$   |
| 8) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ | 16) $x^3 + x^2 = 16x + 16^*$ |

**Задание 4.** Решите уравнение:

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1) $x^2 - 2x + \sqrt{4-x} = \sqrt{4-x} + 15$ | 9) $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)$      |
| 2) $x^2 - 3x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 10$ | 10) $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)$     |
| 3) $x^2 - 2x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 35$ | 11) $x(x^2 + 2x + 1) = 6(x+1)$     |
| 4) $x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18$ | 12) $x(x^2 + 6x + 9) = 4(x+3)$     |
| 5) $x^2 - 2x + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 3$  | 13) $x(x^2 + 4x + 4) = 8(x+2)^*$   |
| 6) $x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7$  | 14) $x(x^2 + 6x + 9) = 10(x+3)^*$  |
| 7) $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$  | 15) $x(x^2 + 8x + 16) = 12(x+4)^*$ |
| 8) $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$ | 16) $x(x^2 + 10x + 25) = 6(x+5)^*$ |

**Задание 5.** Решите уравнение:

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $(x-1)(x^2+8x+16)=6(x+4)$    | 9) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0$   |
| 2) $(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2)$     | 10) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0$  |
| 3) $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3)$     | 11) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0$   |
| 4) $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$     | 12) $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0$  |
| 5) $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3)$     | 13) $(x^2-25)^2+(x^2+2x-15)^2=0$ |
| 6) $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$    | 14) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$ |
| 7) $(x-3)(x^2+10x+25)=9(x+5)^*$ | 15) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$ |
| 8) $(x-4)(x^2+2x+1)=6(x+1)^*$   | 16) $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0$  |

**Задание 6.** Решите уравнение:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$   | 9) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-6=0$     |
| 2) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$    | 10) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$   |
| 3) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0$    | 11) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{x-3}-4=0$    |
| 4) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$    | 12) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$   |
| 5) $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$   | 13) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}-14=0^*$ |
| 6) $\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}-14=0^*$ | 14) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-3=0$    |
| 7) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-12=0^*$ | 15) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{6}{x-3}-16=0^*$ |
| 8) $\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}-7=0^*$  | 16) $\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{1}{x-4}-20=0^*$ |

**Задание 7.** Решите уравнение:

- |                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| 1) $(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0$    | 5) $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$  |
| 2) $(x-2)^4-(x-2)^2-6=0$     | 6) $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$ |
| 3) $(x+3)^4-2(x+3)^2-15=0^*$ | 7) $(x+1)^4+(x+1)^2-6=0$   |
| 4) $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0$   | 8) $(x-2)^4+(x-2)^2-12=0$  |

**Задание 8.** Решите уравнение:

- 1)  $x^4 = (x-20)^2$       3)  $x^4 = (4x-5)^2$       5)  $x^4 = (x-6)^2$       7)  $x^4 = (2x-8)^2$  \*  
 2)  $x^4 = (3x-10)^2$       4)  $x^4 = (2x-15)^2$       6)  $x^4 = (3x-4)^2$       8)  $x^4 = (5x-14)^2$  \*

**Задание 9.** Решите систему уравнений:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y \\ 3x - 4 = y \end{cases}$   | 9) $\begin{cases} 4x^2 + y = 9 \\ 8x^2 - y = 3 \end{cases}$    | 17) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$   |
| 2) $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y \\ 9x - 14 = y \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4 \\ 2x^2 - y = 1 \end{cases}$   | 18) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50 \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y \\ 8x - 6 = y \end{cases}$   | 11) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ 4x^2 - y = 2 \end{cases}$   | 19) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x \end{cases}$  |
| 4) $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y \\ 7x - 5 = y \end{cases}$   | 12) $\begin{cases} 5x^2 + y = 12 \\ 9x^2 - y = 2 \end{cases}$  | 20) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61 \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x \end{cases}$  |
| 5) $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y \\ 8x - 10 = y \end{cases}$  | 13) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$    | 21) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases}$   |
| 6) $\begin{cases} 5x^2 - 11x = y \\ 5x - 11 = y \end{cases}$ | 14) $\begin{cases} 3x^2 + y = 9 \\ 7x^2 - y = 1 \end{cases}$   | 22) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21 \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x \end{cases}$  |
| 7) $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y \\ 2x - 5 = y \end{cases}$   | 15) $\begin{cases} 6x^2 + y = 14 \\ 12x^2 - y = 4 \end{cases}$ | 23) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24 \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x \end{cases}$  |
| 8) $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y \\ 3x - 2 = y \end{cases}$   | 16) $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 4x^2 - y = 1 \end{cases}$   | 24) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45 \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x \end{cases}$  |

**Задание 10.** Решите неравенство:

- |                               |                                       |                                      |
|-------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1)$  | 7) $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$          | 11) $\frac{-14}{(x-5)^2 - 2} \geq 0$ |
| 2) $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$  | 8) $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$         | 12) $\frac{-16}{(x+2)^2 - 5} \geq 0$ |
| 3) $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$  |                                       | 13) $\frac{-13}{(x-4)^2 - 6} \geq 0$ |
| 4) $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$ |                                       | 14) $\frac{-15}{(x+1)^2 - 3} \geq 0$ |
| 5) $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$  | 9) $\frac{-10}{(x-3)^2 - 5} \geq 0$   | 15) $\frac{-11}{(x-2)^2 - 3} \geq 0$ |
| 6) $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4)$  | 10) $\frac{-18}{(x+4)^2 - 10} \geq 0$ | 16) $\frac{-17}{(x+3)^2 - 7} \geq 0$ |

**Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия****Задание 1.** Сократите дробь:

1)  $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$ , если  $p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$

4)  $\frac{p(a)}{p(6-a)}$ , если  $p(c) = \frac{c(6-c)}{c-3}$

2)  $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$ , если  $p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right)\left(5b + \frac{1}{b}\right)$

5)  $\frac{p(a)}{p(8-a)}$ , если  $p(c) = \frac{c(8-c)}{c-4}$

3)  $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$ , если  $p(b) = \left(b + \frac{10}{b}\right)\left(10b + \frac{1}{b}\right)$

6)  $\frac{p(a)}{p(20-a)}$ , если  $p(c) = \frac{c(20-c)}{c-10}$

**Задание 2.** Решите уравнение:

1)  $(2x-2)^2(x-2) = (2x-2)(x-2)^2$

9)  $(x+5)^3 = 25(x+5)$

2)  $(x-8)(4x-8)^2 = (x-8)^2(4x-8)$

10)  $(x+2)^3 = 4(x+2)$

3)  $(2x-5)^2(x-5) = (2x-5)(x-5)^2$

11)  $(x+4)^3 = 16(x+4)$

4)  $(x+3)(4x+2)^2 = (4x+2)(x+3)^2$

12)  $(x+9)^3 = 81(x+9)$

5)  $(x-2)(x-3)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5)$

13)  $3x^2 - 7x + 29 = (x+4)^2$

6)  $(x-7)(x-4)(x-6) = (x-7)(x-3)(x-6)$

14)  $4x^2 - 9x + 12 = (x+6)^2$

7)  $(x+2)(x-13)(x-4) = (x+2)(x-5)(x-13)$

15)  $-3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2$

8)  $(x-4)(x+5)(x+7) = (x+5)(x+7)(x-2)$

16)  $-4x^2 - 7x + 12 = (x-2)^2$

**Задание 3.** Решите уравнение:

1)  $x^6 = (6x-5)^3$

4)  $x^3 = 3x^2 + 4x$

7)  $(x-2)^2(x-3) = 20(x-2)$

2)  $x^6 = (7x-12)^3$

5)  $x^3 = 2x^2 + 8x$

8)  $(x-2)^2(x-3) = 12(x-2)$

3)  $x^6 = (6x-8)^3$

6)  $x^3 = 4x^2 + 5x$

**Задание 4.** Решите систему уравнений:

1) 
$$\begin{cases} (x+6y)^2 = 7y \\ (x+6y)^2 = 7x \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} (2x+6y)^2 = 8y \\ (2x+6y)^2 = 8x \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} (2x+y)^2 = 3y \\ (2x+y)^2 = 3x \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} y-2x=6 \\ x^2-xy+y^2=12 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2+xy-y^2=20 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} y-x=-5 \\ x^2-2xy-y^2=17 \end{cases}$$

**Задание 5.** Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 6x^2 - y = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x^2 + y = 4 \\ 2x^2 - y = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ 4x^2 - y = 2 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 4x^2 - y = 1 \end{cases}$$

**Задание 6.** Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x - y = -8 \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} (x-4)(y-6) = 0 \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ x^2 + 6 = 2y + y^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{5} = 2 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} (x-8)(y-9) = 0 \\ \frac{y-5}{x+y-13} = 4 \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x^2 = 11y + 3 \\ x^2 + 1 = 11y + y^2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - y = 15 \\ \frac{x+6}{2} - \frac{y}{3} = 6 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} (x-6)(y-7) = 0 \\ \frac{y-4}{x+y-10} = 3 \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x^2 = 10y + 6 \\ x^2 + 3 = 10y + y^2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y = -8 \\ \frac{x}{4} + \frac{y-2}{3} = -1 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} (x-4)(y-7) = 0 \\ \frac{y-5}{x+y-9} = 2 \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x^2 = 17y + 2 \\ x^2 + 2 = 17y + y^2 \end{cases}$$

**Задание 7.** Решите неравенство:

$$1) (x-3)(2x+3) < -7 \quad 5) (4x-6)^2 \geq (6x-4)^2$$

$$2) (x-1)(3x-5) < 1 \quad 6) (5x-8)^2 \geq (8x-5)^2$$

$$3) (2x+1)(x-1) > 9 \quad 7) (3x-5)^2 \geq (5x-3)^2$$

$$4) (3x-2)(x+4) > -11 \quad 8) (2x-7)^2 \geq (7x-2)^2$$

**Задание 8.** Решите неравенство:

$$1) x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64) \quad 3) x^2(-x^2-25) \leq 25(-x^2-25)$$

$$2) x^2(-x^2-49) \leq 49(-x^2-49) \quad 4) x^2(-x^2-9) \leq 9(-x^2-9)$$

**Задание 9.** Решите неравенство:

$$1) \frac{-14}{x^2+2x-15} \leq 0 \quad 5) \frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$$

$$2) \frac{-19}{x^2+x-12} \leq 0 \quad 6) \frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3}$$

$$3) \frac{-25}{x^2+9x-10} \leq 0^* \quad 7) \frac{x^2}{3} \geq \frac{8x-9}{5}^*$$

$$4) \frac{-23}{x^2+6x-16} \leq 0^* \quad 8) \frac{x^2}{2} < \frac{11x-4}{5}^*$$

**Задание 10.** Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x \\ (x-5)(x+8) < 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (6x+2) - 6(x+2) > 2x \\ (x-7)(x+6) < 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(9x+3) - 9(4x+3) > 3x \\ (x-2)(x+9) < 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (5x+4) - 5(x+4) > 2x \\ (x-3)(x+10) < 0 \end{cases}$$

**Задание 11.** Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0 \\ 2-7x \leq 14-3x \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{3-x}{1+(5-x)^2} \geq 0 \\ 8-7x \leq 12-3x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{7-7x}{2+(3-x)^2} \geq 0 \\ 6-9x \leq 31-4x \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2-2x}{8+(2-6x)^2} \geq 0 \\ 5-9x \leq 37-5x \end{cases}$$

### Часть 3. Типовые экзаменационные варианты\*

**Задание 1.** Решите уравнение:

$$1) x^6 = -(4-5x)^3$$

$$3) x^6 = -(5x+6)^3$$

$$2) x^6 = -(10-7x)^3$$

$$4) x^6 = -(7x+6)^3$$

**Задание 2.** Решите неравенство:

$$1) -\frac{12}{x^2-8x-9} \geq 0$$

$$3) \frac{-23}{18+3x-x^2} \leq 0$$

$$2) -\frac{-29}{x^2-6x-16} \geq 0$$

$$4) \frac{-19}{20+x-x^2} \leq 0$$

**Задание 3.** Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ xy = 18 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = -5 \end{cases}$$