# Конспект по математике 6 класс

*Составитель: Е. А. Ширяева*

На основе УМК «Математика 6 класс» авторы:
А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир

*2022 г.*

# Глава 1. Делимость натуральных чисел

## § 1. Делители и кратные

30 делится на 5

Натуральное число $a$ делится нацело на натуральное число $b$, если найдётся натуральное число с такое, что справедливо равенство $a = b \cdot c$.

42 кратно 6
6 – делитель 42

Если натуральное число $a$ делится нацело на натуральное число $b$, то число $a$ называют кратным числа $b$, а число $b$ – делителем числа $a$.

### Определения

**Кратным** натурального числа $a$ называют натуральное число, которое делится без остатка (нацело) на $a$.
**Делителем** натурального числа $a$ называют натуральное число, на которое $a$ делится без остатка (нацело).

7, 14, 21… кратно 7

9, 18, 27… кратно 9

Для любого натурального числа $a$ каждое из чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, … является кратным числа $a$.

1 и 73 – делители числа 73

Наименьшим делителем любого натурального числа $a$ является число 1, а наибольшим – само число $a$.

### Делимость суммы

Если каждое из чисел $a$ и $b$ делится нацело на число $k$, то и сумма $a+b$ также делится нацело на число $k$.

*Пример 1*

21 делится на 3
18 делится на 3
(21+18) делится на 3

Если ни число $a$ и ни число $b$ не делятся нацело на число $k$, то их сумма $a+b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число $k$.

*Пример 2*

12 не делится на 5
13 не делится на 5
(12+13) <u>делится</u> на 5

*Пример 3*

12 не делится на 5
14 не делится на 5
(12+14) <u>не делится</u> на 5

Если число $a$ делится нацело на число $k$, а число $b$ не делится нацело на число $k$, то сумма $a+b$ не делится нацело на число $k$.

*Пример 4*

35 делится на 7
15 не делится на 7
(35+15) не делится на 7

## § 2. Признаки делимости на 10, на 5 и на 2

### Признак делимости на 10

Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10.
Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то число не делится нацело на 10.

| делятся на 10 | не делятся на 10 |
|---|---|
| 10, 80, 100, 1480 | 12, 81,105,1488 |

### Определения:

Натуральные числа, которые нацело делятся на 2, называют **чётными**.
Натуральные числа, которые не делятся нацело на 2, называют **нечётными**.

| четные цифры | нечетные цифры |
|---|---|
| 0, 2, 4, 6, 8 | 1, 3, 5, 7, 9 |

### Признак делимости на 2

Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2.
Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

| делятся на 2 | не делятся на 2 |
|---|---|
| 12, 34, 168, 3590 | 15, 37, 161, 3599 |

### Признак делимости на 5

Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5.
Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

| делятся на 5 | не делятся на 5 |
|---|---|
| 15, 40, 365, 9170 | 12, 37, 161, 3599 |

## § 3. Признаки делимости на 9 и на 3

### Признак делимости на 9

Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9.
Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

| делятся на 9 | не делятся на 9 |
|---|---|
| 27, 108, 441, 9513 | 28, 209, 780, 2325 |

### Признак делимости на 3

Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3.
Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

| делятся на 3 | не делятся на 3 |
|---|---|
| 27, 111, 708, 2325 | 37, 161, 365, 9175 |

**Это интересно!**

### Признак делимости на 4

Если две последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 4, то и само число делится нацело на 4.

| делятся на 4 | не делятся на 4 |
|---|---|
| 108, 1500, 3596, 75344 | 209, 1401, 7022, 10434 |

### Признак делимости на 25

Если две последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 25, то и само число делится нацело на 25.

| делятся на 25 | не делятся на 25 |
|---|---|
| 125, 275, 8250, 11100 | 140, 355, 7777, 11001 |

### Признак делимости на 8

Если три последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 8, то и само число делится нацело на 8.

| делятся на 8 | не делятся на 8 |
|---|---|
| 3800, 5016, 37240 | 4002, 9034, 25700 |

### Правило

Если число $a$ делится нацело на числа $p$ и $q$, и при этом у чисел $p$ и $q$ нет общих делителей, кроме 1, то число $a$ делится нацело на произведение $pq$.

### Признак делимости на 6

Если число делится нацело на 2 и на 3, то оно делится нацело и на 6.

| делятся на 6 | не делятся на 6 |
|---|---|
| 54, 132, 2034, 7320 | 34, 111, 2325, 3596 |

### Признак делимости на 15

Если число делится нацело на 3 и на 5, то оно делится нацело и на 15.

| делятся на 15 | не делятся на 15 |
|---|---|
| 195, 2325, 33330 | 115, 708, 33033 |

### Признак делимости на 18

Если число делится нацело на 2 и на 9, то оно делится нацело и на 18.

| делятся на 18 | не делятся на 18 |
|---|---|
| 108, 432, 9540 | 441, 780, 9513 |

*Примечание:*
Если числа $p$ и $q$ имеют общий делитель, отличный от 1, то из делимости нацело числа $a$ на числа $p$ и $q$ еще не следует, что это число делится нацело на произведение $pq$: число 24 делится нацело на 3 и на 6, но не делится нацело на 18.

## § 4. Простые и составные числа

### Определения

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.
Натуральное число называют **составным**, если оно имеет больше двух натуральных делителей.

| простые числа | составные числа |
|---|---|
| 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … | 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, … |

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

*Примеры*

А) $10=2\cdot5$
Б) $12=2\cdot2\cdot3=2^2\cdot3$
В) $30=2\cdot3\cdot5$
Г) $64=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6$
Д) $231=3\cdot7\cdot11$
Е) $300=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5=2^2\cdot3\cdot5^2$

### Разложение на простые множители

*Вариант 1*

$$630=10\cdot63=2\cdot5\cdot3\cdot3\cdot7=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$$

$$630=30\cdot21=3\cdot2\cdot5\cdot3\cdot7=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$$

*Вариант 2*

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

## § 5. Наибольший общий делитель

**Определение**

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

**Обозначение:** НОД $(a, b)$

НОД $(30, 45) - ?$

### I способ

делители числа 30: $\{1, 2, \underline{3}, \underline{5}, 6, 10, \underline{15}, 30\}$

делители числа 45: $\{1, \underline{3}, \underline{5}, 9, \underline{15}, 45\}$

общие делители для 30 и 45: $\{3, 5, 15\}$

НОД $(30, 45) = 15$

### II способ

*Алгоритм:*

1. Разложить числа на простые множители
2. Определить общие множители для всех чисел
3. Перемножить общие множители

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & \mathbf{3} \\ 15 & 3 \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array}$$

НОД $(30, 45) = 3 \cdot 5 = 15$

**Для трех чисел**

НОД $(36, 84, 120) - ?$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \mathbf{2} \\ 18 & \mathbf{2} \\ 9 & \mathbf{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & \mathbf{2} \\ 42 & \mathbf{2} \\ 21 & \mathbf{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & \mathbf{2} \\ 60 & \mathbf{2} \\ 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

НОД $(36, 84, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

**Определение**

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют **взаимно простыми**.

Любые два простых числа являются взаимно простыми.
Если число $a$ – делитель числа $b$, то НОД $(a, b) = a$.

| | | |
|---|---|---|
| Взаимно простые числа | НОД $(5, 12) = 1$ | НОД $(3, 7, 10) = 1$ |
| Одно из чисел – делитель (для остальных) | НОД $(4, 8) = 4$ | НОД $(30, 60, 90) = 30$ |

## § 6. Наименьшее общее кратное

**Определение**
Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наименьшим общим кратным** этих чисел.
**Обозначение:** НОК $(a, b)$

НОК $(30, 45)-?$

### I способ

числа, кратные 30: $\{30, 60, \underline{90}, 120, 150, \underline{180}, \ldots\}$
числа, кратные 45: $\{45, \underline{90}, 135, \underline{180}, \ldots\}$
числа, кратные 30 и 45: $\{90, 180, \ldots\}$
НОК $(30, 45) = 90$

*Числа, кратные первому числу, можно сразу проверять на кратность второму числу*

### II способ

*Алгоритм:*
1. Разложить числа на простые множители
2. Выписать множители, входящие в разложения одного из чисел
3. Добавить к ним недостающие множители из разложений других чисел
4. Найти произведение получившихся множителей

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array}$$

НОК $(30, 45) = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{=30} \cdot 3 = 90$

НОК $(30, 45) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 5}_{=45} \cdot 2 = 90$

**Для трех чисел**

НОК $(36, 84, 120)-?$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \mathbf{2} \\ 18 & \mathbf{2} \\ 9 & \mathbf{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & \mathbf{2} \\ 42 & \mathbf{2} \\ 21 & \mathbf{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & \mathbf{2} \\ 30 & \mathbf{2} \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

НОК $(36, 84, 120) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}_{=36} \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2520$

НОК $(36, 84, 120) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}_{=120} \cdot 3 \cdot 7 = 2520$

### III способ

Если числа заданы в виде степеней, то используется такой *алгоритм:*
1. Выбрать степени, основания которых встречаются только в одном из разложений данных чисел на простые множители.
2. Для каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выбрать степень с бо́льшим показателем.
3. Перемножить выбранные степени.
Полученное произведение является искомым наименьшим общим кратным.

### *Пример*

$\text{НОК}\,(84, 90) - ?$

$84 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 = 2^2\cdot 3^1\cdot 7^1$
$90 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^1\cdot 3^2\cdot 5^1$

$\text{НОК}\,(84, 90) = 7^1\cdot 5^1\cdot 2^2\cdot 3^2 = 7\cdot 5\cdot 4\cdot 9 = 1260$

### **Для трех чисел**

$\text{НОК}\,(18, 24, 30) - ?$

| | |
|---|---|
| $18 = 2\cdot 3\cdot 3$ | $18 = 2^1\cdot 3^2$ |
| $24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$ | $24 = 2^3\cdot 3^1$ |
| $30 = 2\cdot 3\cdot 5$ | $30 = 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1$ |

$\text{НОК}\,(18, 24, 30) = 5^1\cdot 2^3\cdot 3^2 = 5\cdot 8\cdot 9 = 360$

Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.
Если число $b$ – кратное для числа $a$ ($a$ – делитель числа $b$), то $\text{НОК}\,(a, b) = b$.

| | |
|---|---|
| Взаимно простые числа | $\text{НОК}\,(5, 12) = 5\cdot 12 = 60$<br>$\text{НОК}\,(3, 7, 10) = 3\cdot 7\cdot 10 = 210$ |
| Одно из чисел – кратное (для остальных) | $\text{НОК}\,(4, 8) = 8$<br>$\text{НОК}\,(30, 45, 90) = 90$ |

# Глава 2. Обыкновенные дроби

## § 7. Основное свойство дроби

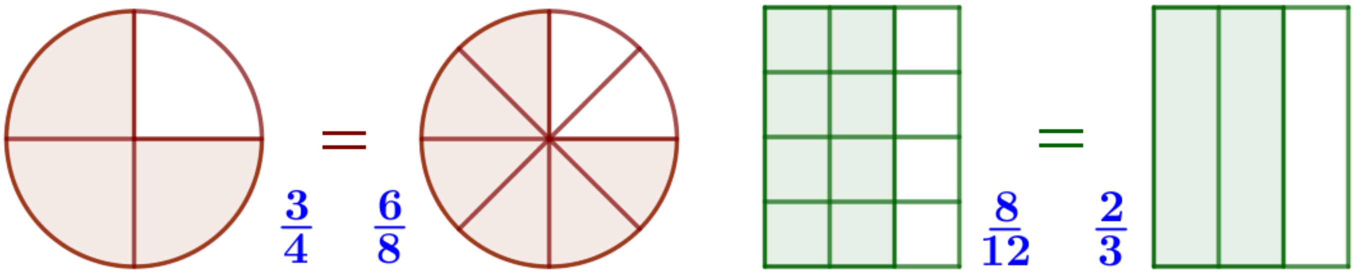
**Правила**

1) Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8} \qquad \frac{7}{20}=\frac{7\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{35}{100}$$

2) Если числитель и знаменатель дроби разделить на их общий делитель, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n} \qquad \frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3} \qquad \frac{19}{38}=\frac{19:19}{38:19}=\frac{1}{2}$$




Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

## § 8. Сокращение дробей

**Определения**

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от 1, называют **сокращением** дроби.

Дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа, называют **несократимой**. $\frac{2}{5}, \frac{19}{44}, \frac{73}{100}$

Если сократить дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, то получится несократимая дробь.

**3 способа сокращения дробей**

1) Последовательное сокращение $\frac{90}{135}=\frac{90:5}{135:5}=\frac{18}{27}=\frac{18:3}{27:3}=\frac{6}{9}=\frac{6:3}{9:3}=\frac{2}{3}$

2) Разложение на множители $\frac{90}{135}=\frac{9\cdot 10}{5\cdot 27}=\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{2}{3}$

3) Сокращение на НОД $(a, b)$

$\text{НОД}\,(90, 135)=45 \qquad \frac{90}{135}=\frac{90:45}{135:45}=\frac{2}{3}$

## § 9. Приведение дробей к общему знаменателю. Сравнение дробей

Дробь можно привести к любому знаменателю, кратному знаменателю дроби.

**Определение**

Число, на которое надо умножить знаменатель дроби, чтобы получить новый знаменатель, называют **дополнительным множителем**.

*Пример*

Привести дробь $\frac{5}{6}$ к знаменателю 42

$42:6=7$
дополнительный множитель – 7

$$\frac{5}{6}^{(7}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$$

$$\frac{a}{b}^{(n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \qquad \frac{3}{4}^{(5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20} \qquad \frac{9}{50}^{(2}=\frac{9\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{18}{100}$$

Любые две дроби можно привести к одному и тому же знаменателю – **общему знаменателю**.

**Определение**

**Общий знаменатель двух дробей** – это общее кратное их знаменателей.

### Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (НОЗ)

*Алгоритм:*

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей;
2) найти дополнительные множители для каждой из дробей, разделив общий знаменатель на знаменатели данных дробей;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

*Пример:*

Привести $\frac{7}{8}$ и $\frac{11}{12}$ к общему знаменателю

1) найти НОК знаменателей дробей

$$\begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{2} \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \mathbf{2} \\ 6 & \mathbf{2} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{НОК}\,(8,12)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$$

2) найти дополнительные множители для каждой из дробей

$24:8=3$ $\qquad$ $24:12=2$

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель

$$\frac{7}{8}^{(3}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24} \qquad \frac{11}{12}^{(2}=\frac{11\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{22}{24}$$

Чтобы **сравнить две дроби** с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями.

*Пример*

Сравнить дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$

Приведем к общему знаменателю 15:

$$\frac{2^{(5}}{3}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{10}{15};\quad \frac{3^{(3}}{5}=\frac{3\cdot3}{5\cdot3}=\frac{9}{15}$$

т.к. $\frac{10}{15}>\frac{9}{15}$, то $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$

## § 10. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

*Примеры*

1) $\frac{3^{(3}}{\underset{2\cdot4}{8}}+\frac{1^{(4}}{\underset{2\cdot3}{6}}=\frac{3\cdot3}{8\cdot3}+\frac{1\cdot4}{6\cdot4}=\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{13}{24}$

2) $\frac{7^{(3}}{\underset{4\cdot4}{16}}-\frac{5^{(4}}{\underset{4\cdot3}{12}}=\frac{7\cdot3}{16\cdot3}-\frac{5\cdot4}{12\cdot4}=\frac{21}{48}-\frac{20}{48}=\frac{1}{48}$

### Свойства сложения

1) переместительное свойство: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

2) сочетательное свойство: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right)$

3) свойства нуля: $0+a=a+0=a$

*Примеры (смешанные числа)*

3) $4\frac{5}{\underset{4\cdot3}{12}}+2\frac{3^{(3}}{\underset{4\cdot1}{4}}=4+\frac{5}{12}+2+\frac{3\cdot3}{3\cdot4}=6+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}=6\frac{14}{12}=6\frac{7}{6}=6+1\frac{1}{6}=7\frac{1}{6}$

4) $1-\frac{9}{16}=\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

5) $6-3\frac{7}{11}=5\frac{11}{11}-3\frac{7}{11}=2\frac{4}{11}$

6) $5\frac{1^{(3}}{\underset{3\cdot2}{6}}-2\frac{4^{(2}}{\underset{3\cdot3}{9}}=5\frac{3}{18}-2\frac{8}{18}=4\frac{21}{18}-2\frac{8}{18}=2\frac{13}{18}$

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, необходимо «подготовить» уменьшаемое, «раздробив» одну единицу на нужное количество частей.

## § 11. Умножение дробей

$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}$ Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменений.

*Пример* $\frac{2}{9}\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{9}=\frac{8}{9}$ Увеличивается **количество** взятый долей

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей.

Чтобы умножить два смешанных числа, надо сначала записать их в виде неправильных дробей, а затем воспользоваться правилом умножения дробей.

*Примеры*

1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{32}=\frac{4\cdot 15}{9\cdot 32}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 8}=\frac{5}{24}$

2) $2\frac{3}{11}\cdot 1\frac{9}{35}=\frac{25}{11}\cdot\frac{44}{35}=\frac{25\cdot 44}{11\cdot 35}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 7}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$

### Свойства умножения

1) переместительное свойство: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

2) сочетательное свойство: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}\right)$

3) распределительное свойство: $\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\pm\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$

4) свойства нуля: $0\cdot a=a\cdot 0=0$

5) свойство единицы: $1\cdot a=a\cdot 1=a$

*Примеры*

3) $\left(3-\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\right)\cdot 18=3\cdot 18-\frac{5}{6}\cdot 18+\frac{7}{9}\cdot 18=54-5\cdot 3+7\cdot 2=54-15+14=53$

4) $6\frac{1}{10}\cdot 5=\left(6+\frac{1}{10}\right)\cdot 5=6\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 5=30+\frac{1}{2}=30\frac{1}{2}$

5) $2\frac{3}{11}\cdot\frac{9}{16}+1\frac{8}{11}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{16}\cdot\left(2\frac{3}{11}+1\frac{8}{11}\right)=\frac{9}{16}\cdot 4=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

6) $\frac{1}{4}a+\frac{5}{8}a=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\cdot a=\left(\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\right)\cdot a=\frac{7}{8}a$

## § 12. Нахождение дроби от числа

**Правила**

1) Чтобы найти **дробь от числа**, можно число умножить на эту дробь.

$$\frac{7}{9} \text{ от } 36 \text{ составляют } 36\cdot\frac{7}{9}=\frac{36\cdot 7}{1\cdot 9}=\frac{4\cdot 7}{1\cdot 1}=28$$

$$\frac{3}{4} \text{ от } x \text{ составляют } x\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}x$$

2) Чтобы найти **проценты от числа**, можно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

$$6\% \text{ от } 15 \ (0{,}06 \text{ от } 15) \text{ составляют } 15\cdot 0{,}06=0{,}9$$

$$48\% \text{ от } \frac{5}{6} \left(0{,}48 \text{ от } \frac{5}{6}\right) \text{ составляют } \frac{5}{6}\cdot 0{,}48=\frac{5\cdot 48}{6\cdot 100}=\frac{5\cdot 8}{1\cdot 100}=0{,}40=0{,}4$$

$$30\% \text{ от } x \ (0{,}3 \text{ от } x) \text{ составляют } x\cdot 0{,}3=0{,}3x$$

## § 13. Взаимно обратные числа

**Определение**

Два числа, произведение которых равно 1, называют **взаимно обратными**.

Числом, обратным 1, является само число 1.
Для числа 0 обратного числа не существует.
Если $n$ – натуральное число, то обратное ему является число $\frac{1}{n}$.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ $\qquad$ $\frac{4}{9}$ и $\frac{9}{4}$ $\qquad$ 2,5 и 0,4 $\qquad$ 3 и $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $7\frac{2}{9}$ и $\frac{9}{65}$

## § 14. Деление дробей

### Правило

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю.

### Свойства

$1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ $0:\frac{a}{b}=0$ На 0 делить нельзя

*Примеры*

1) $\frac{6}{35}:\frac{2}{5}=\frac{6}{35}\cdot\frac{5}{2}=\frac{\overset{3}{6}\cdot\overset{1}{5}}{\underset{7}{35}\cdot\underset{1}{2}}=\frac{3}{7}$

2) $10:\frac{6}{7}=\frac{10}{1}:\frac{6}{7}=\frac{10}{1}\cdot\frac{7}{6}=\frac{\overset{5}{10}\cdot 7}{1\cdot\underset{3}{6}}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$

3) $3\frac{3}{5}:4=\frac{18}{5}:\frac{4}{1}=\frac{18}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\overset{9}{18}\cdot 1}{5\cdot\underset{2}{4}}=\frac{9}{10}$

4) $1\frac{7}{8}:1\frac{9}{16}=\frac{15}{8}:\frac{25}{16}=\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{25}=\frac{\overset{3}{15}\cdot\overset{2}{16}}{\underset{1}{8}\cdot\underset{5}{25}}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

## § 15. Нахождение числа по заданному значению его дроби

### Правила

1) Чтобы найти **число по заданному значению его дроби**, можно данное значение разделить на эту дробь.

$$\frac{7}{9} \text{ от } x \text{ составляют } 28 \Rightarrow \frac{7}{9}x=28$$

$$x=28:\frac{7}{9}=\frac{28}{1}\cdot\frac{9}{7}=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{1}=36$$

2) Чтобы найти **число по его процентам**, можно представить проценты в виде дроби и разделить значение процентов на эту дробь.

$$70\% \text{ от } x \text{ составляют } 84\ (0{,}7 \text{ от } x \text{ составляют } 84) \Rightarrow 0{,}7x=84$$

$$x=84:0{,}7=840:7=120$$

# § 16. Преобразование обыкновенной дроби в десятичную

## Правила

1) Чтобы несократимую дробь $\frac{a}{b}$ преобразовать в десятичную, необходимо привести её к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д.

### *Примеры*

1) $\frac{7}{10}=0{,}7$

2) $\frac{23}{100}=0{,}23$

3) $\frac{19}{1000}=0{,}019$

4) $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot5}{2\cdot5}=\frac{5}{10}=0{,}5$

5) $\frac{23}{50}=\frac{23\cdot2}{50\cdot2}=\frac{46}{100}=0{,}46$

6) $\frac{3}{40}=\frac{3}{4\cdot10}=\frac{3\cdot25}{40\cdot25}=\frac{75}{1000}=0{,}075$

2) Несократимую дробь $\frac{a}{b}$ можно преобразовать в десятичную дробь только тогда, когда разложение знаменателя $b$ на простые множители не содержит чисел, отличных от 2 и 5.

**2, 4, 5, 8, 16, 20, 25, 40, 50** и др.

3) Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, можно её числитель разделить на знаменатель.

### *Примеры*

7) $\frac{1}{5}=1:5=0{,}2$

$$\begin{array}{r|l} -1{,}0 & \underline{\;5\;} \\ \underline{1\,0} & 0{,}2 \\ 0 & \end{array}$$

8) $\frac{19}{4}=19:4=4{,}75$

$$\begin{array}{r|l} -19{,}0 & \underline{\;4\;} \\ \underline{16\;\;} & 4{,}75 \\ -30 & \\ \underline{28} & \\ -20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

9) $\frac{13}{25}=13:25=0{,}52$

$$\begin{array}{r|l} -13{,}0 & \underline{\;25\;} \\ \underline{12\,5} & 0{,}52 \\ -50 & \\ \underline{50} & \\ 0 & \end{array}$$

# § 17. Бесконечные периодические дроби

## Определения

1) Дроби, в записи которых после запятой стоит конечное число цифр, называют **конечными десятичными дробями**. (§ 16)

2) Если дробь $\frac{a}{b}$ несократима и ее знаменатель $b$ в разложении на простые множители содержит не только 2 и 5 $\left(\text{например } \frac{7}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{9}\right)$, то она представляется в виде **бесконечной периодической десятичной дроби**.

*Примеры:*

| Обыкновенная дробь | Периодическая дробь | Краткая запись (период дроби) *прочтение* |
|---|---|---|
| $\frac{1}{9}$ | 0,111111… | 0,(1) *Нуль целых один в периоде* |
| $\frac{5}{11}$ | 0,454545… | 0,(45) *Нуль целых сорок пять в периоде* |
| $\frac{7}{12}$ | 0,583333… | 0,58(3) *Нуль целых пятьдесят восемь сотых и три в периоде* |

## Правило

При делении натурального числа на натуральное число можно получить один из трёх результатов: натуральное число, конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь.

*Примеры:*

1) $12:3=4$ 2) $12:5=2{,}4$ 3) $12:11=1{,}(09)$

## § 18. Десятичное приближение обыкновенных дробей

**Правило**

Чтобы найти десятичное приближение обыкновенной дроби до нужного разряда, надо:

1) выполнить деление до следующего разряда;

2) полученную конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь округлить до нужного разряда.

*Примеры:*

| **Дробь** | **Приближение** *до десятых* | *до сотых* | *до тысячных* |
|---|---|---|---|
| 1) $\frac{26}{45}$ | $\frac{26}{45}=0{,}57\ldots\approx 0{,}6$ | $\frac{26}{45}=0{,}577\ldots\approx 0{,}58$ | $\frac{26}{45}=0{,}5777\ldots\approx 0{,}578$ |
| 2) $8\frac{1}{3}$ | $8\frac{1}{3}=8{,}33\ldots\approx 8{,}3$ | $8\frac{1}{3}=8{,}333\ldots\approx 8{,}33$ | $8\frac{1}{3}=8{,}3333\ldots\approx 8{,}333$ |

# Глава 3. Отношения и пропорции

## § 19. Отношения

### Определение

$\dfrac{a}{b}$ или $a:b$

$a$ – предыдущий член

$b$ – последующий член

Частное двух чисел $a$ и $b$, отличных от нуля, называют **отношением** чисел $a$ и $b$, или отношением числа $a$ к числу $b$.

### Основное свойство отношения

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

$$3:6=6:12=2:4=0{,}2:0{,}4=30:60=\ldots$$

*Следствие:* Отношение дробных чисел можно заменить отношением натуральных чисел.

$$\frac{2}{3}:\frac{7}{9}=\left(\frac{2}{3}\cdot 9\right):\left(\frac{7}{9}\cdot 9\right)=6:7 \qquad 1\frac{1}{2}:0{,}25=\left(1\frac{1}{2}\cdot 4\right):(0{,}25\cdot 4)=6:1$$

**Отношение** чисел $a$ и $b$ показывает, **во сколько раз** число $a$ больше числа $b$ или **какую часть** число $a$ составляет от числа $b$.

*Пример:*

Стороны прямоугольника равны 2 см и 5 см. Найдем отношение длин его сторон.

*Отношение большей стороны к меньшей:*

$\dfrac{\mathbf{Б}}{\mathbf{М}}=\dfrac{5}{2}=2{,}5\Rightarrow$ длина одной сторона в 2,5 раза больше длины другой.

*Отношение меньшей стороны к большей:*

$\dfrac{\mathbf{М}}{\mathbf{Б}}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow$ длина меньшей стороны составляет $\dfrac{2}{5}$ от длины большей стороны.

### Отношение величин

Если значение двух величин выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют также отношением этих величин (отношением длин, отношением масс, отношением площадей и т.д.)

Если значения величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо сначала перейти к одной единице измерения.

$$36\text{ кг}:9{,}6\text{ ц}=36\text{ кг}:960\text{ кг}=\frac{36}{960}=\frac{3}{80}=3:80$$

### Определение

**Масштаб** – отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности

1:5 000 000 — 1 см на карте соответствует 5 000 000 см на местности, то есть 50 км

Отношение разноименных величин – это новая величина с новыми единицами измерения.

*Примеры:*

- *скорость* – отношение длины пройденного пути ко времени, за которое пройден этот путь;
- *цена* – отношение стоимости товара к количеству единиц его измерения (килограммов, литров, метров, коробок и др.);
- *плотность* – отношение массы вещества к его объёму;
- *производительность труда* – отношение объёма выполненной работы ко времени, за которое выполняется эта работа

## § 20. Пропорции

### Определение

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ или } \underset{\uparrow}{a}:\overset{\text{средние}}{\overset{\downarrow}{b}=\overset{\downarrow}{c}}:\underset{\uparrow}{d}$$

**крайние**

Равенство двух отношений называют **пропорцией**. Числа $a$ *и* $d$ называют **крайними членами** пропорции, а числа $b$ и $c$ – **средними** членами пропорции.

### Основное свойство пропорции

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

*Примеры:*

1) $\frac{1{,}5}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 1{,}5\cdot 4=2\cdot 3$
$6=6$

2) $0{,}25:\frac{50}{7}=1{,}4:40\Rightarrow 0{,}25\cdot 40=\frac{50}{7}\cdot 1{,}4$
$10=10$

*Следствие:* если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$, $d=\frac{bc}{a}$

*Примеры:*

1) $\frac{9}{x}=\frac{3}{7}$
$x=\frac{9\cdot 7}{3}=21$

2) $\frac{x}{3{,}2}=\frac{630}{4{,}2}$
$x=\frac{3{,}2\cdot 630}{4{,}2}=\frac{3{,}2\cdot 30}{0{,}2}=480$

3) $\frac{25}{100}=\frac{x}{78}$
$x=\frac{25\cdot 78}{100}=\frac{1\cdot 78}{4}=19{,}5$

Если $a$, $b$, $c$ и $d$ – числа, отличные от нуля, и $ad = bc$, то отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны и могут образовать пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

если $ad = bc$, то

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a},\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ и } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

*Пример:*

$$4 \cdot 21 = 7 \cdot 12 \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{12}{21},\ \frac{21}{12} = \frac{7}{4},\ \frac{4}{12} = \frac{7}{21},\ \frac{21}{7} = \frac{12}{4}$$

## § 21. Процентное отношение двух чисел

**Определение**

$\frac{a}{b} \cdot 100$ **Процентное отношение** двух чисел – это их отношение, выраженное в процентах.

Процентное отношение показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.
Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

*Примеры задач:*

1) В парке растет 400 деревьев, из них 96 – ели. Сколько процентов всех деревьев составляют ели?

Найдем процентное отношение количества елей к количеству всех деревьев: $\frac{96}{400} \cdot 100 = 24(\%) \Rightarrow$ ели составляют 24% от всех деревьев.

2) Стоимость товара возросла со 150 р. до 240 р. На сколько процентов увеличилась стоимость товара?

Найдем процентное отношение новой стоимость к начальной стоимости: $\frac{240}{150} \cdot 100 = 160(\%) \Rightarrow$ новая стоимость составляет 160% относительно начальной. Было 100%, стало 160%, получаем, что стоимость увеличилась на 60% $(160\% - 100\% = 60\%)$.

## § 22. Прямая и обратная пропорциональная зависимости

### Определение

Две переменные величины называют **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

$$\frac{y}{x}=k \;\Rightarrow\; y=kx$$

Если две переменные величины прямо пропорциональны, то отношение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же, постоянному для данных величин, числу.

*Примеры:*

1) сторона и периметр квадрата

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ – сторона, см | 1 | 3 | 4,5 | ↑ |
| Р – периметр, см | 1+1+1+1=4 | 3+3+3+3=12 | 4,5+4,5+4,5+4,5=18 | ↑ |

$$\frac{P}{a}=\frac{4}{1}=\frac{12}{3}=\frac{18}{4{,}5}=4 \;\Rightarrow\; P=4a \text{ (прямая пропорциональность)}$$

2) время и путь

Пусть скорость движения туриста будет равна 5 км/ч.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $v$ – скорость туриста, км/ч | 5 | 5 | 5 | |
| $t$ – время движения, ч | 1 | 1,5 | 2 | ↑ |
| $S$ – путь, пройденный за время $t$, км | 5 | 5+2,5=7,5 | 5+5=10 | ↑ |

$$\frac{S}{t}=\frac{5}{1}=\frac{7{,}5}{1{,}5}=\frac{10}{2}=5 \;\Rightarrow\; S=5t \text{ (прямая пропорциональность)}$$

### Определение

Две переменные величины называют **обратно пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из этих величин в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

$$xy=k \;\Rightarrow\; y=\frac{k}{x}$$

Если две переменные величины обратно пропорциональны, то произведение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же для данных величин числу.

*Примеры:*

3) скорость и время

Пусть путь будет равен 12 км.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ – путь из одного села в другое, км | 12 | 12 | 12 | 12 | |
| $\mathcal{V}$ – скорость велосипедиста, км/ч | 4 | 6 | 8 | 12 | ↑ |
| $t$ – время движения, ч | 3 | 2 | 1,5 | 1 | ↓ |

$$\mathcal{V}t=4\cdot3=6\cdot2=8\cdot1{,}5=12\cdot1=12 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}t=12 \;\Rightarrow\; t=\frac{12}{\mathcal{V}}$$

(обратная пропорциональность)

4) стороны прямоугольника

Пусть площадь прямоугольника равна 24 см$^2$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$, см$^2$ | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | |
| $a$, см | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | ↑ |
| $b$, см | 24 | 12 | 8 | 6 | 4,8 | 4 | 3 | ↓ |

$$ab=1\cdot24=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6=5\cdot4{,}8=6\cdot4=8\cdot3=24 \;\Rightarrow\; ab=24 \;\Rightarrow\; b=\frac{24}{a}$$

(обратная пропорциональность)

*Примеры задач:*

1) Из 3 кг зерен кофе получается 2,5 кг жаренных зерен. Сколько килограмм жареных зерен получится из 4,8 кг сырых?

| Сырые зерна | | Жареные зерна | |
|---|---|---|---|
| 3 кг | ↑ | 2,5 кг | ↑ |
| 4,8 кг | | $x$ кг | |

Составим и решим пропорцию:

$$\frac{3}{4{,}8}=\frac{2{,}5}{x}$$

$$x=\frac{4{,}8\cdot2{,}5}{3}=4\text{ (кг)}.$$

Ответ: из 4,8 кг зерен кофе получится 4 кг жареных зерен.

2) Двое маляров могут покрасить забор за 5 дней. Для ускорения работы добавили еще трех маляров. За какое время они выполнят работу, если все маляры работают с одинаковой производительностью?

| Количество маляров | | Количество дней | |
|---|---|---|---|
| 2 маляра | ↑ | 5 дней | ↓ |
| 5 маляров | | $x$ дней | |

Составим и решим обратную пропорцию:

$$\frac{2}{5}=\frac{x}{5}$$

$$x=\frac{2\cdot 5}{5}=2\ (\text{дня}).$$

Ответ: 5 маляров выполнят работу за 2 дня.

## § 23. Деление числа в данном отношении

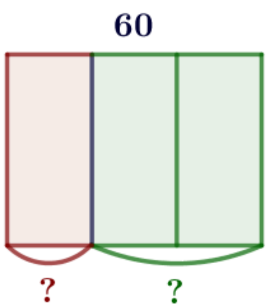
**Правило**

Чтобы разделить число на части, пропорционально данным числам, надо разделить его на сумму этих чисел и частное последовательно умножить на каждое из этих чисел.

*Пример:*

Разделим число 60 в разных отношениях.

**1:2**

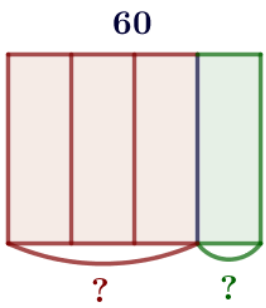



$1+2=3$ части
по $60:3=20$

$20\cdot 1=20$
$20\cdot 2=40$

*Ответ*: $20$ и $40$

**3:1**

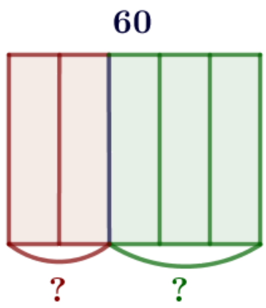



$3+1=4$ части
по $60:4=15$

$15\cdot 3=45$
$15\cdot 1=15$

*Ответ*: $45$ и $15$

**2:3**

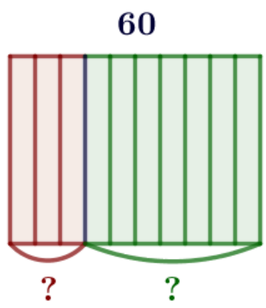



$2+3=5$ частей
по $60:5=12$

$12\cdot 2=24$
$12\cdot 3=36$

*Ответ*: $24$ и $36$

**3:7**



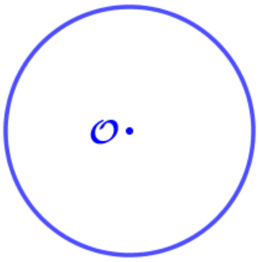

$3+7=10$ частей
по $60:10=6$

$6\cdot 3=18$
$6\cdot 7=42$

*Ответ*: $18$ и $42$

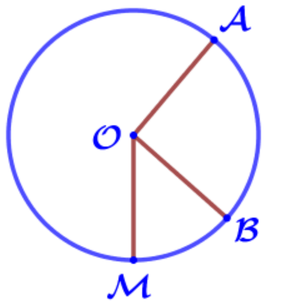
## § 24. Окружность и круг

### Определения



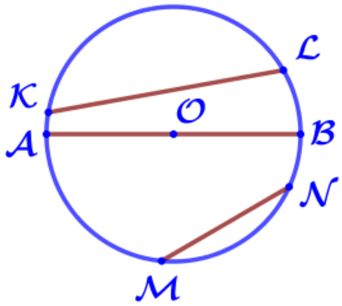

**Окружность** – это замкнутая линия, все точки которой равноудалены от центра.

O – **центр окружности**




Отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой, называют **радиусом**.

$OA = OB = OM = r$ – радиусы окружности

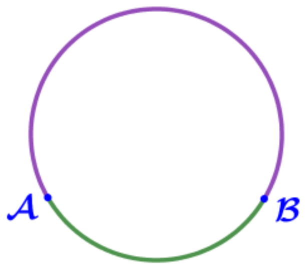



Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называют **хордой**.

KL, AB, MN – хорды

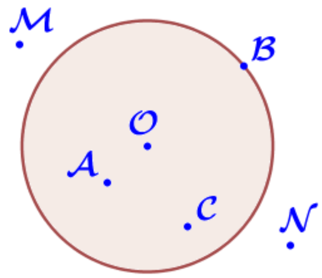
Хорда, которая проходит через центр, называется **диаметром**.

AB – диаметр, $d = 2r$



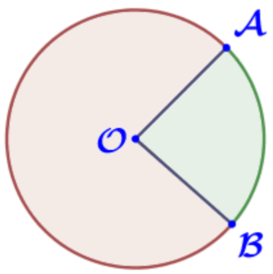

Часть окружности, ограниченная двумя точками, называется **дугой**.

Окружность ограничивает часть плоскости. Эту часть плоскости вместе с окружностью называют **кругом**.
Круг имеет **центр, радиус, диаметр, хорду** – это соответственно центр, радиус, диаметр, хорда окружности, ограничивающей круг.

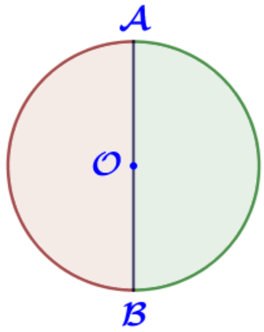



O – центр круга

Точки O, A, B и C принадлежат кругу (расстояние до центра меньше радиуса круга или равно ему).
Точки M и N не принадлежат кругу (расстояние до центра больше, чем радиус круга)

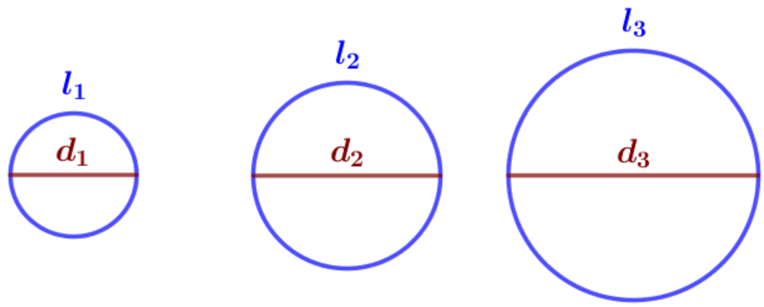



Часть круга, заключенная, между двумя радиусами, называется **сектором**.




Диаметр делит круг на две равные части, каждую из которых называют **полукругом**.

## § 25. Длина окружности. Площадь круга




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d$ – диаметр, см | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | ↑ |
| $l$ – длина окружности, см | $l_1$ | $l_1$ | $l_1$ | ↑ |

Доказано, что для всех окружностей отношение длины окружности к её диаметру является одним и тем же числом, т. е. $\frac{l}{d}=\frac{l_1}{d_1}=\frac{l_2}{d_2}=\frac{l_3}{d_3}=\pi \Rightarrow l=\pi d$.

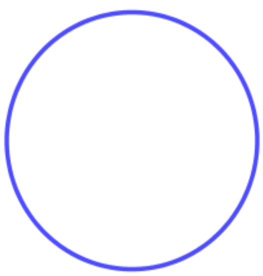
Длина окружности прямо пропорциональна её диаметру.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots$$

(бесконечная непериодическая десятичная дробь)

Чаще всего используют десятичное приближение до сотых: $\pi \approx 3{,}14$.

*Формулы*



**Длина окружности *l***

$l=\pi d$ или $l=2\pi r$,

где $r$ – радиус окружности

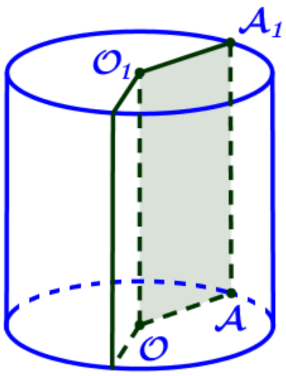
**Площадь круга S**

$$S=\pi r^2,$$

где $r$ – радиус круга

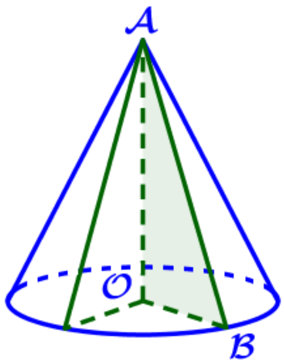
## § 26. Цилиндр, конус, шар

### Определения



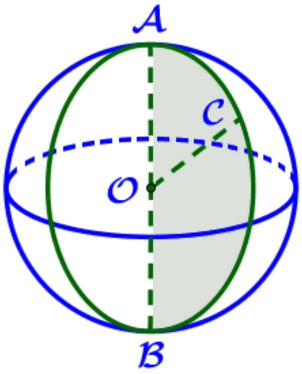

Прямоугольник $OO_1A_1A$ вращается вокруг стороны OC. В результате вращения образуется фигура, которую называют **цилиндром**.

При вращении сторон OA и $O_1A_1$: образуются два равных круга. Их называют **основаниями цилиндра**.
При вращении стороны $AA_1$ образуется **боковая поверхность цилиндра**.
$OO_1$ – **высота цилиндра**.
$AA_1$ – **образующая цилиндра**.
$S_{бок}=2\pi rh$, где $r$ – радиус основания цилиндра, $h$ - высота цилиндра.



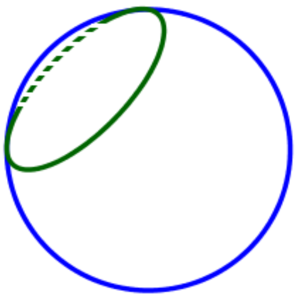

Прямоугольный треугольник AOB с прямым углом O вращается вокруг стороны AO. В результате вращения образуется фигура, которую называют **конусом**.

При вращении стороны OB образуется круг. Его называют **основанием конуса**.
При вращении стороны AB образуется **боковая поверхность конуса**.
AO – **высота конуса**,
AB – **образующая конуса**,
A – **вершина конуса**.




Полукруг вращается вокруг диаметра AB. В результате вращения образуется фигура, которую называют **шаром**.

O – **центр шара**.
**Радиус шара** – отрезок, соединяющий точку поверхности шара с центром.
$OA=OB=OC$ – радиусы шара
**Диаметр шара** – отрезок, соединяющий две точки поверхности шара и проходящий через центр шара.
AB – диаметр, $d=2r$



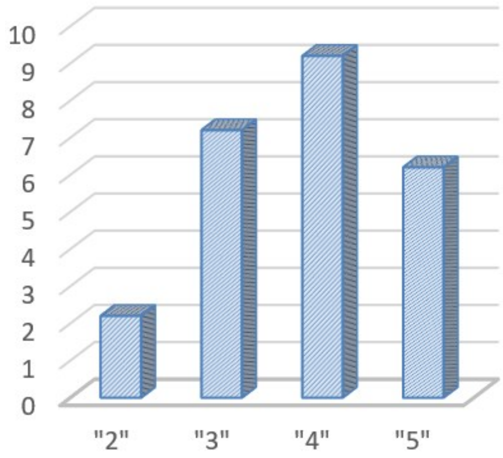
Полуокружность вращается вокруг диаметра АВ. В результате вращения образуется фигура, которую называют **сферой**. Сфера – поверхность шара, она его ограничивает.

Сечение шара плоскостью – это всегда круг.

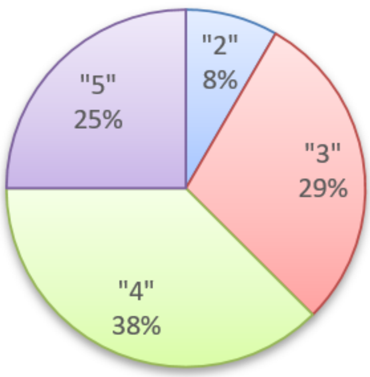
Многогранники: прямоугольный параллелепипед, куб, призма, пирамида. Тела вращения: цилиндр, конус, шар.

## § 27. Диаграммы

**Столбчатые**




**Круговые**




## § 28. Случайные события. Вероятность случайного события

**Определения**

Наука, которая занимается оценкой вероятности случайных событий, называется **теорией вероятностей**.

**Вероятность** – степень (мера, количественная оценка) возможности успеха (наступления) того или иного события.

**Обозначение:** p(A) – вероятность события A

| Виды событий | Примеры | Вероятность |
|---|---|---|
| достоверное | Выигрыш в беспроигрышной лотерее. | $p(A)=1$ |
| невозможное | Выпадение 10 очков при бросании одного игрального кубика. | $p(A)=0$ |
| случайное | Выбор белого шара из коробки с черными и белыми шарами. | $0<p(A)<1$ |

### *Формула*

Если эксперимент заканчивается одним из $n$ равновозможных исходов, из которых $m$ являются благоприятными для наступления данного события, то вероятность этого события равна $\frac{m}{n}$, то есть $p(A)=\frac{m}{n}$, $0\le p(A)\le 1$.

### *Примеры задач*

1) Опыт: бросание игрального кубика
Элементарные исходы: {1; 2; 3; 4; 5; 6} всего 6 исходов

<u>События:</u>
А – выпадение 3-х очков
В – выпадение четного числа очков
С – выпадение менее 7 очков
В – выпадение 8-ми очков

<u>Вероятности:</u>

| | | |
|---|---|---|
| $P(A)=\frac{1}{6}$ | $m=1$: $\{3\}$<br>$n=6$: $\{1;2;3;4;5;6\}$ | случайное событие |
| $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ | $m=3$: $\{2;4;6\}$<br>$n=6$: $\{1;2;3;4;5;6\}$ | случайное событие |
| $P(C)=\frac{6}{6}=1$ | $m=6$: $\{1;2;3;4;5;6\}$<br>$n=6$: $\{1;2;3;4;5;6\}$ | достоверное событие |
| $P(D)=\frac{0}{6}=0$ | $m=0$: $\varnothing$<br>$n=6$: $\{1;2;3;4;5;6\}$ | невозможное событие |

2) Опыт: выбор шара из ящика, в котором лежат 2 белых, 3 синих и 5 красных шара
Элементарные исходы: {1б; 2б; 3с; 4с; 5с; 6к, 7к, 8к, 9к, 10к}

<u>События:</u>
А – выбранный шар белый
В – выбранный шар красный
С – выбранный шар желтый

<u>Вероятности:</u>

| | | |
|---|---|---|
| $P(A)=\frac{2}{10}=0,2$ | $m=2$: $\{1б;2б\}$<br>$n=10$: $\{1б;2б;3с;4с;5с;6к;7к;8к;9к;10к\}$ | случайное |
| $P(B)=\frac{5}{10}=0,5$ | $m=5$: $\{6к;7к;8к;9к;10к\}$<br>$n=10$: $\{1б;2б;3с;4с;5с;6к;7к;8к;9к;10к\}$ | случайное |
| $P(C)=\frac{0}{6}=0$ | $m=0$: $\varnothing$<br>$n=10$: $\{1б;2б;3с;4с;5с;6к;7к;8к;9к;10к\}$ | невозможное |

# Глава 4. Рациональные числа и действия с ними

## § 29. Положительные и отрицательные числа

Существуют величины, понимаемые в противоположных смыслах (измеряемые в двух противоположных направлениях):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Доход 100 рублей | **+100** | Расход 100 рублей | **–100** |
| Выигрыш 10 очков | **+10** | Проигрыш 10 очков | **–10** |
| 15° тепла (выше нуля) | **+15°** | 15° холода (ниже нуля) | **–15** |
| 5 шагов вперед | **+5** | 5 шагов назад | **–5** |

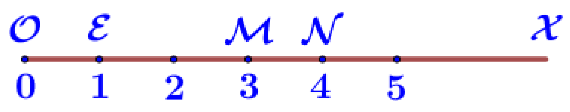
**+100**, **+10**, **+15**, **+5** – положительные числа (знак «+» можно не писать)

**–100**, **–10**, **–15**, **–5** – отрицательные числа (всегда используется знак «–»)

Число **0** особенное: его не относят ни к положительным, ни к отрицательным числам.

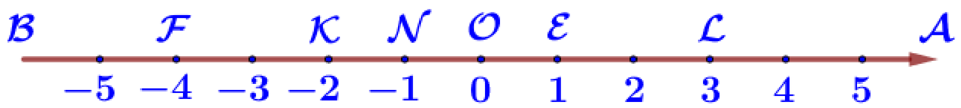
Если одно число положительное, а другое отрицательное, то о таких числах говорят, что они имеют *разные знаки*. А если оба числа положительны или оба числа отрицательны, то говорят, что они имеют *одинаковые знаки*.

## § 30. Координатная прямая




OX – координатный луч,
O – начало отсчета,
OE – единичный отрезок.

Прямую, на которой выбрали начало отсчёта, единичный отрезок и направление, называют **координатной прямой**.



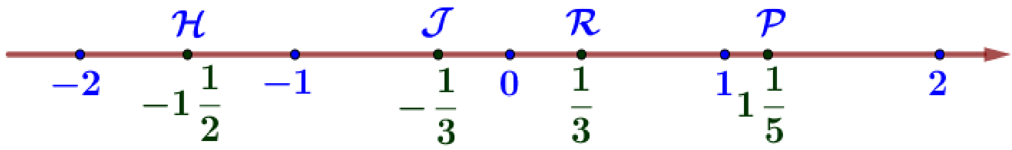

Луч OA задаёт **положительное направление** на прямой AB, а луч OB – **отрицательное направление**. Положительное направление указывают стрелкой.

Числа –4, –2, –1, 0, 1, 3…, соответствующие точкам F, K, N, O, E, L…, называют **координатами** этих точек и записывают F(–4), K(–2), N(–1), O(0), E(1), L(3) и т.д.

*Пример:*

Начертите координатную прямую и отметьте на ней точки:

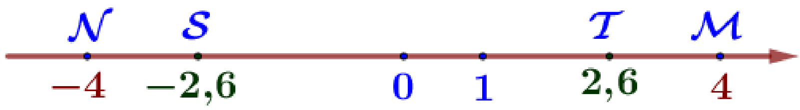
$H\left(-1\frac{1}{2}\right)$, $J\left(-\frac{1}{3}\right)$, $P\left(1\frac{1}{5}\right)$, $R\left(\frac{1}{3}\right)$.




Все положительные числа и нуль называют **неотрицательными** числами.
Все отрицательные числа и нуль называют **неположительными** числами.

## § 31. Целые числа. Рациональные числа

Числа –4 и 4; $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$; –2,6 и 2,6; –100 и 100 называют **противоположными.**

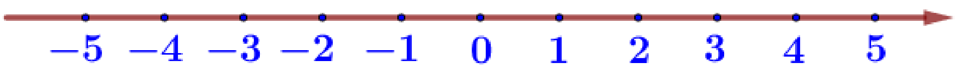



Число –4 противоположно числу 4, число 4 противоположно числу –4.
Число 0 считают противоположным самому себе.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-a$ | число противоположное числу $a$ | $-(+9)=-9$ | |
| $-(-a)$ | число противоположное числу $-a$ | $-(-7)=7$ | $-(-a)=a$ |

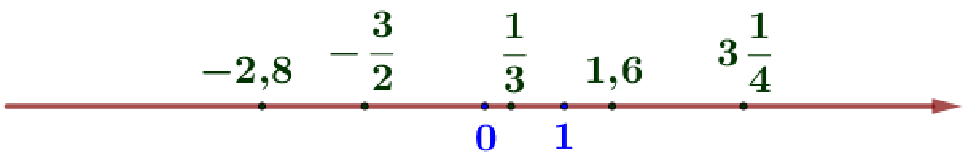
Все натуральные числа, противоположные им числа и число 0 называют **целыми числами**.

*Целые числа:*



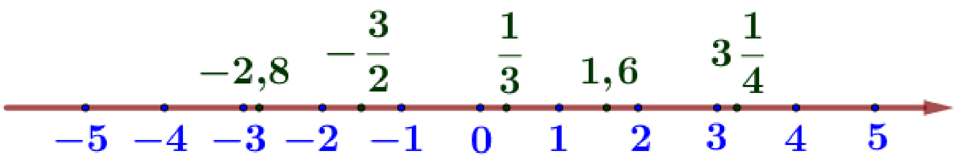

противоположные натуральным числам (целые отрицательные числа) «0» натуральные числа (целые положительные числа)

*Дробные числа:*




Целые и дробные числа вместе образуют **рациональные числа**.

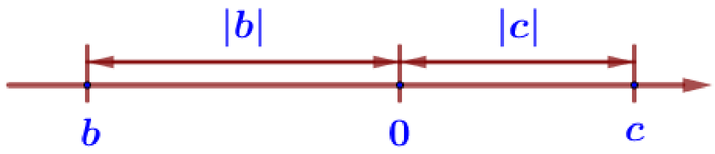
*Рациональные числа:*



## § 32. Модуль числа

### Определение

**Модулем** числа $a$ называют *расстояние* от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.




### Свойства модуля

1) Модуль числа принимает только **неотрицательные** значения.

2) Модуль неотрицательного числа равен этому числу, модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному:

$|a| = a$, если $a$ – неотрицательное число;

$|a| = -a$, если $a$ – отрицательное число.

3) Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

*Примеры:*

1) $|0| = 0$

2) $|4| = 4$

3) $|-4| = 4$

4) $|2{,}6| = 2{,}6$

5) $|-2{,}6| = 2{,}6$

6) $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

7) $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

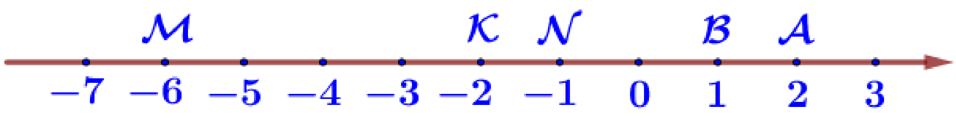
8) $\left|3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$

9) $\left|-3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$

## § 33. Сравнение чисел

### Правила

1) Большим из двух чисел является число, расположенное на координатной прямой правее.
2) Любое положительное число больше любого отрицательного числа.
3) Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше.
4) Любое отрицательное число меньше нуля, любое положительное число больше нуля.




$-6 < -1$ $\quad |-6| > |-1|$

$-2 < 0$

$0 < 2$

$1 < 2$ $\quad |1| < |2|$

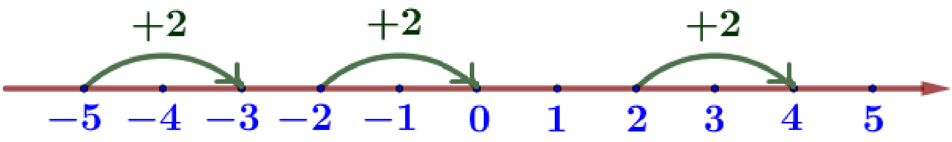
| | | |
|---|---|---|
| $a$ – положительное число | $a > 0$ | *a больше* 0 |
| $a$ – отрицательное число | $a < 0$ | *a меньше* 0 |
| $a$ – неотрицательное число | $a \geq 0$ | *a больше или равно* 0 |
| $a$ – неположительное число | $a \leq 0$ | *a меньше или равно* 0 |

## Свойство модуля

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

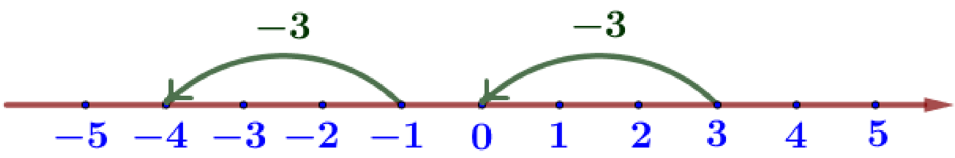
### § 34. Сложение рациональных чисел

Если к числу $a$ прибавить положительное число $b$, то точка с координатой, $a$ переместится по координатной прямой на $b$ единичных отрезков вправо




$(-5)+2=-3$ $(-2)+2=0$ $2+2=4$

Если к числу $a$ прибавить отрицательное число $b$, то точка с координатой, $a$ переместится по координатной прямой на $-b$ единичных отрезков влево




$(-1)+(-3)=-4$ $3+(-3)=0$

## Правила

Чтобы **сложить** два числа **с разными знаками**, надо:
1) найти модули слагаемых;
2) из большего модуля вычесть меньший модуль;
3) перед полученным числом поставить знак слагаемого с большим модулем.

*Примеры:*

1) $-4+5=1$ 3) $-5+1=-4$ 5) $9+(-7)=2$ 7) $1+(-10)=-9$

2) $-3{,}2+7=3{,}8$ 4) $-7\frac{1}{3}+2=-5\frac{1}{3}$ 6) $8+\left(-4\frac{3}{5}\right)=3\frac{2}{5}$ 8) $4{,}1+(-6{,}6)=-2{,}5$

Чтобы **сложить** два **отрицательных числа**, надо:
1) найти модули слагаемых;
2) сложить модули слагаемых;
3) перед полученным числом поставить знак «–».

*Примеры:*

9) $-1+(-9)=-10$ 10) $-1{,}4+(-2)=-3{,}4$ 11) $-5+\left(-1\frac{7}{8}\right)=-6\frac{7}{8}$

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

*Примеры:*

12) $-7+7=0$    13) $5+(-5)=0$

Для любого рационального числа $a$

$$a+0=0+a=a$$

## § 35. Свойства сложения рациональных чисел

### Свойства сложения

Для любых рациональных чисел $a$, $b$ и $c$ справедливы равенства:

$a+b=b+a$ – переместительное свойство сложения

$(a+b)+c=a+(b+c)$ – сочетательное свойство сложения

*Примеры:*

1) $-7+2=-5$
   $2+(-7)=-5$

2) $-2{,}5+(-3)=-5{,}5$
   $-3+(-2{,}5)=-5{,}5$

3) $(-2+1{,}7)+1{,}3=-0{,}3+1{,}3=1$
   $-2+(1{,}7+1{,}3)=-2+3=1$

В сумме нескольких рациональных чисел слагаемые можно менять местами и расставлять скобки, выбирая наиболее удобный порядок действий.

*Пример:*

$$-1{,}71+(-2)+6+(-7)+3+(-4)+1{,}71=$$
$$=(-1{,}71+1{,}71)+[(-2)+(-7)+(-4)]+(6+3)=0+(-13)+9=-4$$

## § 36. Вычитание рациональных чисел

### Определение

**Разностью** рациональных чисел $a$ и $b$ называют такое рациональное число $x$, которое в сумме с числом $b$ даёт число $a$.

$$a-b=x, \quad \text{если} \quad x+b=a$$

### Правило

Чтобы найти разность двух чисел, можно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

$$a-b=a+(-b)$$

*Примеры:*

1) $5-7=5+(-7)=-2$

2) $-1{,}1-8=-1{,}1+(-8)=-9{,}1$

3) $4-(-8)=4+8=12$

4) $-\frac{1}{9}-\left(-2\frac{5}{9}\right)=-\frac{1}{9}+2\frac{5}{9}=2\frac{4}{9}$

Если разность $a-b$ отрицательна, то $a<b$, если разность $a-b$ положительна, то $a>b$.

*Примеры:*

$$7<10 \qquad\qquad 19>5$$

$$7-10=-3<0 \qquad\qquad 19-5=14>0$$

## § 37. Умножение рациональных чисел

### Правила

Чтобы **умножить** два числа **с разными знаками**, надо умножить их модули и перед полученным произведением поставить знак «–».

Чтобы **умножить** два **отрицательных** числа, надо умножить их модули.

*Примеры:*

1) $(-7)\cdot 3=-(7\cdot 3)=-21$

2) $5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(5\cdot\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}$

3) $(-1,4)\cdot(-5)=1,4\cdot 5=7$

4) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

### Свойства нуля и единицы

$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a \qquad a\cdot 1=1\cdot a=a \qquad a\cdot 0=0\cdot a=0$

### Свойства умножения

1) Если числа $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки, то произведение $ab$ положительно. И наоборот, если произведение $ab$ положительно, то числа $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки.

$$(+50)\cdot(+3)=+150 \qquad\qquad (+a)\cdot(+b)=+ab$$

$$(-50)\cdot(-3)=+150 \qquad\qquad (-a)\cdot(-b)=+ab$$

2) Если числа $a$ и $b$ имеют разные знаки, то произведение $ab$ отрицательно. И наоборот, если произведение $ab$ отрицательно, то числа $a$ и $b$ имеют разные знаки.

$$(+50)\cdot(-3)=-150 \qquad\qquad (+a)\cdot(-b)=-ab$$

$$(-50)\cdot(+3)=-150 \qquad\qquad (-a)\cdot(+b)=-ab$$

3) Если хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ равно нулю, то произведение $ab$ равно нулю. И наоборот, если произведение $ab$ равно нулю, то хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ равно нулю.

$$a=0 \qquad\qquad ab=0 \qquad\qquad ab=0$$

$$b=0 \qquad\qquad ab=0 \qquad\qquad a=0 \text{ или } b=0$$

*Пример:*

Решите уравнение $(x+3)(x-2{,}4)=0$.

$(x+3)(x-2{,}4)=0 \Rightarrow$

$x+3=0$ или $x-2{,}4=0$

$x=-3$ или $x=2{,}4$

Ответ: $-3;\ 2{,}4$.

4) При любых значениях $x$ выражение $x^2$ принимает только неотрицательные значения.

$$x^2 \geq 0$$

## § 38. Переместительное и сочетательное свойства умножения рациональных чисел. Коэффициент

**Переместительное свойство умножения**

Для любых рациональных чисел $a$ и $b$ выполняется равенство $ab=ba$.

**Сочетательное свойство умножения**

Для любых рациональных чисел $a$, $b$ и $c$ выполняется равенство $(ab)c=a(bc)$.

*Примеры:*

1) $\left(-1\frac{2}{3}\cdot(-5)\right)\cdot\frac{3}{5}=\left(-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot(-5)=-1\cdot(-5)=5$

2) $0{,}4x\cdot 5y\cdot(-3)=0{,}4\cdot 5\cdot(-3)\cdot x\cdot y=-6xy$

В буквенном выражении $-6xy$ числовой множитель $-6$ называют **коэффициентом**.

| **выражение** | **коэффициент** |
|---|---|
| $0{,}21abc$ | $0{,}21$ |
| $-2\frac{5}{7}x$ | $-2\frac{5}{7}$ |
| $y$ | 1, т.к. $y=1\cdot y$ |
| $-kpm$ | $-1$, т.к. $-kpm=(-1)\cdot kpm$ |

## § 39. Распределительное свойство умножения

**Распределительное свойство умножения** (относительно сложения)

Для любых рациональных чисел $a$, $b$ и $c$ выполняются равенства

$$a(b+c)=ab+ac \text{ и } ab+ac=a(b+c).$$

**Определение**

В результате применения распределительного свойства $a(b+c)=ab+ac$ получают выражения, не содержащие скобок. Такие преобразования выражений называют **раскрытием скобок**.

*Примеры:*

1) $-3(2a+5b)=-3\cdot 2a+(-3)\cdot 5b=-6a-15b$

2) $x\cdot(2-y)=x\cdot(2+(-y))=x\cdot 2+x\cdot(-y)=2x-xy$

3) $2(x-y+b)=2x-2y+2b$

4) $-3(a-b-c+7d)=-3a+3b+3c-21d)$

5) $-(x-y+0{,}9z-4t)=(-1)(x-y+0{,}9z-4t)=-x+y-0{,}9z+4t$

## Раскрытие скобок

1) Если перед скобками стоит знак «–», то при раскрытии скобок надо опустить этот знак, а все знаки, стоящие перед слагаемыми внутри скобок, изменить на противоположные.
2) Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо опустить этот знак, а все знаки, стоящие перед слагаемыми внутри скобок, оставить без изменений.

## Определение

Замену $ab+ac=a(b+c)$ называют **вынесением общего множителя за скобки**.

*Примеры:*

6) $3x-3y=3(x-y)$

7) $7\cdot 9-5\cdot 9=9\cdot(7-5)$

8) $5a-15b+5=5a-5\cdot 3b+5\cdot 1=5(a-3b+1)$

## Определение

Слагаемые, имеющие общую буквенную часть, называются **подобными**.

## Приведение подобных слагаемых

Чтобы **привести подобные слагаемые**, надо сложить их коэффициенты и полученный результат умножить на общую буквенную часть.

*Примеры:*

9) $7a-9a+5a=a(7-9+5)=a\cdot 3=3a$

10) $4x-8y-2x+7y=(4x-2x)+(-8y+7y)=x(4-2)+y(-8+7)=x\cdot 2+y\cdot(-1)=2x-y$

11) $3t+18-9t-11=(3t-9t)+(18-11)=t(3-9)+(18-11)=t(3-9)+(18-11)=-6t+7$

## § 40. Деление рациональных чисел

### Определение

**Частным** рациональных чисел $a$ и $b$ ($b \neq 0$) называют такое рациональное число $x$, произведение которого с числом $b$ равно числу $a$.

$$a : b = x, \quad \text{если} \quad xb = a$$

| | | |
|---|---|---|
| $(+60):(+30)=+2$, | так как | $(+2)\cdot(+30)=+60$ |
| $(-60):(-30)=+2$, | так как | $(+2)\cdot(-30)=-60$ |
| $(+60):(-30)=-2$, | так как | $(-2)\cdot(-30)=+60$ |
| $(-60)\cdot(+30)=-2$, | так как | $(-2)\cdot(+30)=-60$ |

### Деление рациональных чисел

1) Чтобы найти частное двух чисел с разными знаками, надо разделить модуль делимого на модуль делителя и поставить перед полученным числом знак «–».
2) Чтобы найти частное двух отрицательных чисел, надо разделить модуль делимого на модуль делителя.

*Примеры:*

1) $(-12):4=-(12:4)=-3$

2) $\frac{1}{3}:\left(-\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}:\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

3) $(-0{,}16):(-0{,}4)=0{,}16:0{,}4=0{,}4$

4) $-2\frac{5}{9}:\left(-2\frac{5}{9}\right)=2\frac{5}{9}:2\frac{5}{9}=1$

### Свойства нуля и единицы

$a:1=a$ $\qquad$ $a:a=1$ $(a \neq 0)$ $\qquad$ $a\cdot 0=0\cdot a=0$

***На нуль делить нельзя.***

## § 41. Решение уравнений

### Свойства уравнений

1) Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

**Следствия:**

А) Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.
Б) Если два одинаковых члена с одинаковыми знаками стоят в разных частях уравнения, то такие члены можно убрать (вычеркнуть).

*Примеры:*

1а) $x+2=5 \quad |+(-2)$
$x+2+(-2)=5+(-2)$
$x=5-2$
$x=3$

1б) $x+2=5$
$x=5-2$
$x=3$

2а) $3x-9=0{,}5(4x-18)$
$3x-9=2x-9 \quad |+9$
$3x-9+9=2x-9+9$
$3x=2x \quad |-2x$
$3x-2x=2x-2x$
$x=0$

2б) $3x-9=0{,}5(4x-18)$
$3x-9=2x-9 \quad |+9$
$3x=2x$
$3x-2x=0$
$x=0$

3) Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

**Следствия:**

А) Если все члены уравнения имеют общий множитель, не равный нулю и не содержащий неизвестных, то все члены уравнения можно на него разделить.

Б) Уравнение можно освободить от дробных членов, не содержащих неизвестное в знаменателе (предварительно приведя к общему знаменателю).

В) Перед всеми членами уравнения можно переменить знаки на противоположные.

*Примеры:*

3) $4x+2=10 \quad |:2$
$2x+1=5$
$2x=5-1$
$2x=4 \quad |:2$
$x=2$

4) $\frac{7x^{(2}}{6}-\frac{x^{(3}}{4}=\frac{33^{(2}}{6}$
$\frac{14x}{12}-\frac{3x}{12}=\frac{66}{12} \quad |\cdot 12$
$14x-3x=66$
$11x=66 \quad |:11$
$x=6$

5) $-6x-7=5 \quad |\cdot(-1)$
$6x+7=-5$
$6x=-5-7$
$6x=-12 \quad |:6$
$x=-2$