

## 20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

### Блок 1. ФИПИ

#### ПРИМЕРЫ

**Пример 1.1.** Упростите выражение:  $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$ .

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Ответ: 72.

**Пример 1.2.** Упростите выражение:  $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$ .

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n} \cdot 2^8 \cdot 3^n \cdot 3^4}{2^{2n} \cdot 2^5 \cdot 3^n \cdot 3^2} = \frac{2^8 \cdot 3^4}{2^5 \cdot 3^2} = 2^{8-5} \cdot 3^{4-2} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Ответ: 72.

**Пример 2.** Найдите значение выражения при данном условии:

$$28a - 7b + 13, \text{ если } \frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6.$$

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = \frac{6}{1}$$

$$2a - 5b + 8 = 6(5a - 2b + 8)$$

$$2a - 5b + 8 = 30a - 12b + 48$$

$$2a - 5b + 8 - 30a + 12b - 48 = 0$$

$$-28a + 7b - 40 = 0$$

$$-28a + 7b = 40$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27 \quad \text{Ответ: } -27$$

**Пример 3.** Решите уравнение:  $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$ .

$$x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) = 0$$

$$x^2(x + 5) - 16(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x + 5)(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

$$\text{Ответ: } -5; -4; 4$$

**Пример 4.** Решите уравнение:  $x^3 + 8x^2 = x + 8$ .

$$x^3 + 8x^2 = x + 8$$

$$x^2(x + 8) = (x + 8)$$

$$x^2(x + 8) - (x + 8) = 0$$

$$(x + 8)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 8)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad x + 1 = 0$$

$$x = -8 \quad \quad \quad x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

Ответ:  $-8; -1; 1$ .

**Пример 5.1.** Решите уравнение:  $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$ .

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \quad \text{при условии } 7 - x \geq 0, \text{ т.е. } x \leq 7$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{посторонний корень, так как } x \leq 7$$

Ответ:  $-6$ .

**Пример 5.2.** Решите уравнение:  $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$ .

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$\text{ОДЗ: } 7 - x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

Ответ:  $-6$ .

**Пример 5.3.** Решите уравнение:  $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$ .

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{ не удовлетворяет условию } 7-x \geq 0$$

Ответ: -6.

**Пример 6.** Решите уравнение:  $x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$ .

$$x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 - 14(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x(x + 5) - 14) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 + 5x - 14) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x = -5$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: -7; -5; 2.

**Пример 7.** Решите уравнение:  $(x-3)(x^2 + 14x + 49) = 11(x+7)$ .

$$(x-3)(x^2 + 14x + 49) = 11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2 = 11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2 - 11(x+7) = 0$$

$$(x+7)((x-3)(x+7) - 11) = 0$$

$$(x+7)(x^2 + 7x - 3x - 21 - 11) = 0$$

$$(x+7)(x^2 + 4x - 32) = 0$$

$$x+7 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$x = -7$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 12}{2} = -8 \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

Ответ: -8; -7; 4.

**Пример 8.1.** Решите уравнение:  $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$ .

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 7)(x - 4), \text{ т.к.}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = 4, \text{ тогда получаем}$$

$$(x - 4)^2 (x + 4)^2 + (x + 7)^2 (x - 4)^2 = 0$$

$$(x - 4)^2 ((x + 4)^2 + (x + 7)^2) = 0$$

$$(x - 4)^2 (x^2 + 8x + 16 + x^2 + 14x + 49) = 0$$

$$(x - 4)^2 (2x^2 + 22x + 65) = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 + 22x + 65 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 65 = 484 - 520 = -36 < 0$$

$$x = 4$$

*действительных корней нет*

*Ответ: 4.*

**Пример 8.2.** Решите уравнение:  $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$ .

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$$

$(x^2 - 16)^2 \geq 0$  и  $(x^2 + 3x - 28)^2 \geq 0$  при любом значении переменной.

*Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, только если они оба равны нулю. Получаем систему уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

$$\begin{cases} x = \pm 4 \\ x = -7 \\ x = 4 \end{cases}$$

*Ответ: 4.*

**Пример 9.1.** Решите уравнение:  $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$ .

ОДЗ:  $x \neq 0$

1) пусть  $\frac{1}{x} = t$ , тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + 6t - 40 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196$$

$$t_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 14}{2} = -10$$

$$t_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 14}{2} = 4$$

2) вернемся к переменной  $x$ :

$$\frac{1}{x} = -10 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = 4$$

$$\frac{1}{x} = -10 \quad | \cdot x \quad \frac{1}{x} = 4 \quad | \cdot x$$

$$1 = -10x \quad 1 = 4x$$

$$x = -\frac{1}{10} \quad x = \frac{1}{4}$$

Ответ:  $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$ .

**Пример 9.2.** Решите уравнение:  $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$ .

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

ОДЗ:  $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$1 + 6x - 40x^2 = 0$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

Ответ:  $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$ .

**Пример 9.3.** Решите уравнение:  $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$ .

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

$$\frac{1 + 6x - 40x^2}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 6x - 40x^2 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{10} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

Ответ:  $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$ .

**Пример 10.1.** Решите уравнение:  $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$ .

1) пусть  $x-3=t$ , тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0$$

$$ODЗ: t \neq 0$$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0 \quad | \cdot t^2$$

$$1 - 7t - 18t^2 = 0$$

$$-18t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-18) \cdot 1 = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 - 11}{-36} = \frac{1}{9} \quad t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 + 11}{-36} = -\frac{1}{2}$$

2) вернемся к переменной  $x$ :

$$x - 3 = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad x - 3 = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{9} + 3 \quad x = -\frac{1}{2} + 3$$

$$x = 3\frac{1}{9} \quad x = 2\frac{1}{2}$$

Ответ:  $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$ .

**Пример 10.2.** Решите уравнение:  $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$ .

ОДЗ:  $x-3 \neq 0$ , т.е.  $x \neq 3$

1) пусть  $\frac{1}{x-3} = t$ , тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2 \quad t_2 = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

2) вернемся к переменной  $x$ :

$$\frac{1}{x-3} = -2$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{x-3} = 9$$

$$\frac{1}{x-3} = -2 \mid \cdot (x-3)$$

$$\frac{1}{x-3} = 9 \mid \cdot (x-3)$$

$$1 = -2(x-3)$$

$$1 = 9(x-3)$$

$$1 = -2x + 6$$

$$1 = 9x - 27$$

$$2x = 6 - 1$$

$$-9x = -27 - 1$$

$$2x = 5$$

$$-9x = -28$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

$$\text{Ответ: } 2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$$

**Пример 11.1.** Решите уравнение:  $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$ .

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть  $(x+5)^2 = t$ , тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной  $x$ :

$$(x+5)^2 = -4$$

действительных корней нет

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5 - \sqrt{3})(x+5 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x+5 - \sqrt{3} = 0$$

$$x+5 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3}$$

$$x = -5 - \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } -5 - \sqrt{3}; -5 + \sqrt{3}.$$

**Пример 11.2.** Решите уравнение:  $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$ .

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть  $(x+5)^2 = t$  ( $t \geq 0$ ), тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \text{ - не удовлетворяет условию } t \geq 0$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной  $x$ :

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5 - \sqrt{3})(x+5 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x+5 - \sqrt{3} = 0 \quad \text{или} \quad x+5 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3} \qquad \qquad x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ:  $-5 - \sqrt{3}; -5 + \sqrt{3}$ .

**Пример 12.** Решите уравнение:  $x^4 = (x-42)^2$ .

$$x^4 = (x-42)^2$$

$$x^4 - (x-42)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-42))(x^2 + (x-42)) = 0$$

$$(x^2 - x + 42)(x^2 + x - 42) = 0$$

$$x^2 - x + 42 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42 = -167 < 0$$

действительных корней нет

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 13}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 13}{2} = 6$$

Ответ:  $-7; 6$ .



**Пример 13.** Решите систему уравнений:  $\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$3x^2 - 8x = 9x - 24$$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$x(3x - 8) - 3(3x - 8) = 0$$

$$(3x - 8)(x - 3) = 0$$

$$3x - 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0$$

$$3x = 8 \quad \quad \quad x = 3$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$y = 9x - 24$$

$$\text{Если } x = 2\frac{2}{3}, \text{ то } y = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 = 24 - 24 = 0;$$

$$\text{если } x = 3, \text{ то } y = 9 \cdot 3 - 24 = 27 - 24 = 3$$

Ответ:  $\left(2\frac{2}{3}; 0\right); (3; 3)$ .

**Пример 14.** Решите систему уравнений:  $\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22. \end{cases}$

$$+\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22 \end{cases}$$

$$9x^2 + 0 = 36 \quad | : 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad \quad \quad x = -2$$

$$y = 14 - 7x^2$$

$$\text{Если } x = 2, \text{ то } y = 14 - 7 \cdot 2^2 = 14 - 28 = -14;$$

$$\text{если } x = -2, \text{ то } y = 14 - 7 \cdot (-2)^2 = 14 - 28 = -14$$

Ответ:  $(-2; -14); (2; -14)$ .

**Пример 15.1.** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, & | \cdot 5 \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 = 295, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 59x = 295, \\ y^2 = 59 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y^2 = 59 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\text{при } x = 5 \quad y^2 = 59 - 2 \cdot 5^2$$

$$y^2 = 9$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$(y - 3)(y + 3) = 0$$

$$y - 3 = 0 \quad y + 3 = 0$$

$$y = 3 \quad y = -3$$

Ответ:  $(5; -3); (5; 3)$ .

**Пример 15.2.** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 59 - 2x^2, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5(2x^2 + y^2) = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 59 - 2 \cdot 5^2, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5 \cdot 59 = 59x \quad | : 59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 9, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ:  $(5; -3); (5; 3)$ .

**Пример 16.** Решите неравенство:  $\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$ .

$$\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$$

т.к.  $-21 < 0$  и  $(x+6)^2-10 \neq 0$ , то равносильным к данному будет неравенство  $(x+6)^2-10 < 0$

Рассмотрим функцию  $f(x) = (x+6)^2 - 10$ .

Нули функции:

$$(x+6)^2 - 10 = 0$$

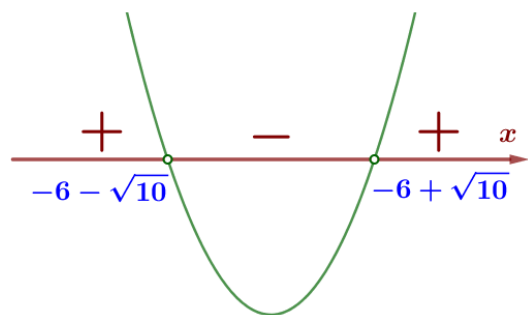
$$(x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) = 0$$

$$x+6-\sqrt{10} = 0 \quad \text{или} \quad x+6+\sqrt{10} = 0$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{10} \quad x_2 = -6 - \sqrt{10}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x+6)^2 - 10$  (парабола,  $a > 0$  - ветви вверх)



$f(x) < 0$  при  $x \in (-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$

Ответ:  $(-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$ .

**Пример 17.1.** Решите неравенство:  $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$ .

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$ .

Нули функции:

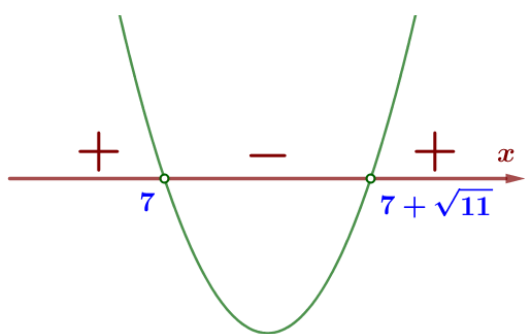
$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) = 0$$

$$x-7=0 \quad \text{или} \quad x-7-\sqrt{11}=0$$

$$x_1=7 \quad \quad \quad x_2=7+\sqrt{11}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$  (парабола,  $a > 0$  - ветви вверх)



$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (7; 7 + \sqrt{11})$$

$$\text{Ответ: } (7; 7 + \sqrt{11}).$$

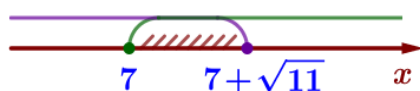
**Пример 17.2.** Решите неравенство:  $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$ .

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

$$\begin{cases} x-7 > 0, \\ x-7-\sqrt{11} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-7 < 0, \\ x-7-\sqrt{11} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 7, \\ x < 7 + \sqrt{11} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7, \\ x > 7 + \sqrt{11} \end{cases}$$



$$x \in (7; 7 + \sqrt{11})$$



$$x \in \emptyset$$

Объединяем решения:  $x \in (7; 7 + \sqrt{11})$

$$\text{Ответ: } (7; 7 + \sqrt{11}).$$

**20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства****Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия****ПРИМЕРЫ**

**Пример 18.** Сократите дробь:  $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$ , если  $p(x) = \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(6x + \frac{1}{x}\right)$ .

$$\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{6}{1/a}\right)\left(6\frac{1}{a} + \frac{1}{1/a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 6a\right)\left(\frac{6}{a} + a\right)} = 1$$

*Ответ: 1.*

**Пример 19.** Сократите дробь:  $\frac{p(a)}{p(18-a)}$ , если  $p(x) = \frac{x(18-x)}{x-9}$ .

$$\begin{aligned} \frac{p(a)}{p(18-a)} &= p(a) : p(18-a) = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)(18-(18-a))}{(18-a)-9} = \\ &= \frac{a(18-a)}{a-9} \cdot \frac{9-a}{(18-a)a} = -1 \end{aligned}$$

*Ответ: -1.*

**Пример 20.** Решите уравнение:  $(4x-9)^2(x-3) = (4x-9)(x-3)^2$ .

$$\begin{aligned} (4x-9)^2(x-3) &= (4x-9)(x-3)^2 \\ (4x-9)^2(x-3) - (4x-9)(x-3)^2 &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(4x-9-(x-3)) &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(3x-6) &= 0 \\ 4x-9=0 \quad \text{или} \quad x-3=0 \quad \text{или} \quad 3x-6=0 \\ 4x=9 & \quad x=3 & \quad 3x=6 \\ x=2,25 & & x=2 \end{aligned}$$

*Ответ: 2; 2,25; 3.*

**Пример 21.** Решите уравнение:  $(x-1)(x+7)(x-8) = (x-1)(x-8)(x+11)$ .

$$\begin{aligned} (x-1)(x+7)(x-8) &= (x-1)(x-8)(x+11) \\ (x-1)(x+7)(x-8) - (x-1)(x-8)(x+11) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(x+7-(x+11)) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(x+7-x-11) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(-4) &= 0 \\ x-1=0 \quad \text{или} \quad x-8=0 \\ x=1 & \quad x=8 \end{aligned}$$

*Ответ: 1; 8.*

**Пример 22.** Решите уравнение:  $(x+3)^3 = 9(x+3)$ .

$$(x+3)^3 = 9(x+3)$$

$$(x+3)^3 - 9(x+3) = 0$$

$$(x+3)((x+3)^2 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x + 9 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x) = 0$$

$$(x+3)x(x+6) = 0$$

$$x+3=0 \quad \text{или} \quad x=0 \quad \text{или} \quad x+6=0$$

$$x=-3$$

$$x=-6$$

Ответ:  $-6; -3$ .

**Пример 23.** Решите уравнение:  $4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$ .

$$4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$$

$$4x^2 - 7x + 13 = x^2 + 6x + 9$$

$$4x^2 - 7x + 13 - x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169 - 48 = 121$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 - 11}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 + 11}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Ответ:  $\frac{1}{3}; 4$ .

**Пример 24.** Решите уравнение:  $x^6 = (11x - 18)^3$ .

$$x^6 = (11x - 18)^3$$

$$(x^2)^3 = (11x - 18)^3$$

$$x^2 = 11x - 18$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 121 - 72 = 49$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

Ответ:  $2; 9$ .

**Пример 25.** Решите уравнение:  $x^3 = 4x^2 + 21x$ .

$$x^3 = 4x^2 + 21x$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 10}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

Ответ:  $-3; 0; 7$ .

**Пример 26.** Решите уравнение:  $(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$ .

$$(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$$

$$(x-5)^2(x-2) - 4(x-5) = 0$$

$$(x-5)((x-5)(x-2) - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 5x - 2x + 10 - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 5$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 5}{2} = 6$$

Ответ:  $1; 5; 6$ .

**Пример 27.** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y \\ (3x+7y)^2 = 10x \end{cases}$$

$$10x = 10y \quad | : 10$$

$$x = y$$

$$(3y+7y)^2 = 10y$$

$$100y^2 - 10y = 0$$

$$10y(10y - 1) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad 10y - 1 = 0$$

$$y = 0,1$$

1) если  $y = 0$ , то  $x = 0$ ,

2) если  $y = 0,1$ , то  $x = 0,1$

Ответ:  $(0; 0); (0,1; 0,1)$ .

**Пример 28.** Решите систему уравнений:  $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 8. \end{cases}$

$$\begin{cases} y - 2x = 2, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + 2x, \\ x^2 + 2x(2 + 2x) - (2 + 2x)^2 = 8 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 4x^2 - (4 + 8x + 4x^2) = 8$$

$$x^2 + 4x + 4x^2 - 4 - 8x - 4x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 16 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 16 = 0$$

$$(x - 2 - 4)(x - 2 + 4) = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{или} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 6 \quad \quad \quad x = -2$$

1) если  $x = -2$ , то  $y = 2 + 2x = 2 + 2 \cdot (-2) = -2$ ,

2) если  $x = 6$ , то  $y = 2 + 2x = 2 + 2 \cdot 6 = 14$

*Ответ:*  $(-2; -2); (6; 14)$ .

**Пример 29.** Решите систему уравнений:  $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20. \end{cases}$

$$+ \begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$\underline{3x^2 = 27} \quad | : 3$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -3$$

1) если  $x = 3$ , то  $y = 7 - x^2 = 7 - 3^2 = 7 - 9 = -2$ ,

2) если  $x = -3$ , то  $y = 7 - x^2 = 7 - (-3)^2 = 7 - 9 = -2$

*Ответ:*  $(-3; -2); (3; -2)$ .



**Пример 30.** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 3y, \\ \frac{7 + 3y}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{7 + 3y}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \quad | \cdot 20$$

$$\frac{28 + 12y}{20} + \frac{5y + 20}{20} = \frac{-20}{20}$$

$$28 + 12y + 5y + 20 = -20$$

$$17y = -20 - 20 - 28$$

$$17y = -68$$

$$y = -68 : 17$$

$$y = -4$$

при  $y = -4$   $x = 7 + 3 \cdot (-4) = 7 - 12 = -5$

Ответ:  $(-5; -4)$ .

**Пример 31.** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} (x-5)(y-8) = 0, \\ \frac{y-6}{x+y-11} = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(y-8) = 0, \\ \frac{y-6}{x+y-11} = 4 \end{cases}$$

$$*(x-5)(y-8) = 0$$

$$x-5 = 0 \quad \text{или} \quad y-8 = 0$$

$$x = 5 \quad \quad \quad y = 8$$

1) если  $x = 5$ , то  $\frac{y-6}{5+y-11} = 4$

$$\frac{y-6}{y-6} = 4$$

корней нет

2) если  $y = 8$ , то  $\frac{8-6}{x+8-11} = 4$

$$\frac{2}{x-3} = 4$$

$$x-3 = \frac{2}{4}$$

$$x = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Ответ:  $(3\frac{1}{2}; 8)$ .

**Пример 32.** Решите систему уравнений:  $\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2 \end{cases}$$

$$7y - 3 + 19 = 7y + y^2$$

$$7y - 3 + 19 - 7y - y^2 = 0$$

$$16 - y^2 = 0$$

$$(4 - y)(4 + y) = 0$$

$$4 - y = 0 \quad \text{или} \quad 4 + y = 0$$

$$y = 4$$

$$y = -4$$

1) если  $y = 4$ , то

$$x^2 = 7 \cdot 4 - 3$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -5$$

2) если  $y = -4$ , то

$$x^2 = 7 \cdot (-4) - 3$$

$$x^2 = -31$$

корней нет

Ответ:  $(-5; 4); (5; 4)$ .

**Пример 33.** Решите неравенство:  $(4x + 1)(x - 2) > -5$ .

$$(4x + 1)(x - 2) > -5$$

$$4x^2 - 8x + x - 2 + 5 > 0$$

$$4x^2 - 7x + 3 > 0$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$ .

Нули функции:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0$$

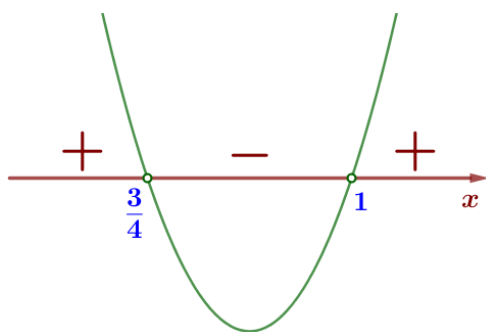
$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = 4x^2 - 7x + 3$  (парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$$f(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$$

Ответ:  $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ .

**Пример 34.** Решите неравенство:  $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$ .

$$(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$$

$$(x-6)^2 - (6x-1)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 12x + 36) - (36x^2 - 12x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$$

$$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-35)$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 - 1$ .

Нули функции:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{или} \quad x+1 = 0$$

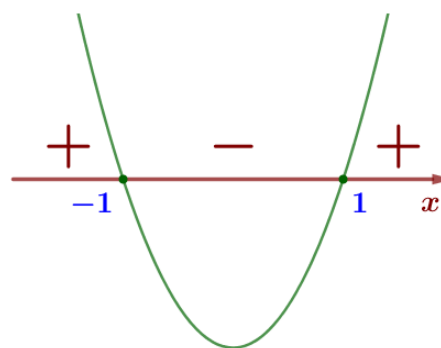
$$x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

Ответ:  $x \in [-1; 1]$ .

Изобразим схематически график

функции  $f(x) = x^2 - 1$

(парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$f(x) \leq 0$  при  $x \in [-1; 1]$

**Пример 35.** Решите неравенство:  $x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$ .

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$$

$$(-x^2-16) < 0$$

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16) \quad | :(-x^2-16)$$

$$x^2 \geq 100$$

$$x^2 - 100 \geq 0$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 - 100.$$

Нули функции:

$$x^2 - 100 = 0$$

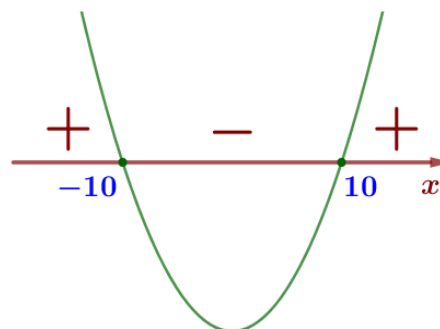
$$(x-10)(x+10) = 0$$

$$x-10 = 0 \quad \text{или} \quad x+10 = 0$$

$$x = 10 \quad \quad \quad x = -10$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = x^2 - 100$  (парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$f(x) \geq 0$  при  $x \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$

Ответ:  $x \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$ .

**Пример 36.** Решите неравенство:  $\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0$ .

$$\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0, \text{ т.к. } -17 < 0 \text{ и } x^2+2x-3 \neq 0, \text{ то}$$

равносильным к данному будет неравенство  $x^2+2x-3 > 0$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Нули функции:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

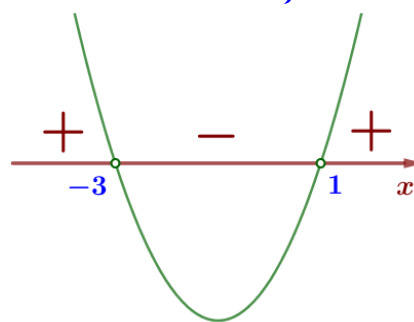
$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ .

Изобразим схематически график функции

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

(парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$f(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

**Пример 37.** Решите неравенство:  $\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$ .

$$\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$$

$$\frac{3x^2}{12} < \frac{16x-20}{12} \quad | \cdot 12$$

$$3x^2 < 16x - 20$$

$$3x^2 - 16x + 20 < 0$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 3x^2 - 16x + 20.$$

Нули функции:

$$3x^2 - 16x + 20 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 256 - 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-(-16) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 - 4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

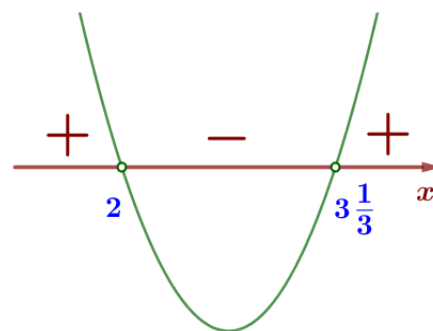
$$x_2 = \frac{-(-16) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 + 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Ответ:  $x \in \left(2; 3\frac{1}{3}\right)$ .

Изобразим схематически график

$$\text{функции } f(x) = 3x^2 - 16x + 20$$

(парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):

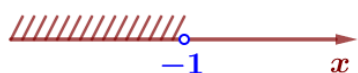


$f(x) < 0$  при  $x \in \left(2; 3\frac{1}{3}\right)$

**Пример 38.** Решите систему неравенств:  $\begin{cases} 2(3x+5)-7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(3x+5)-7(2x+3) > 3x, * \\ (x-4)(x+7) < 0 ** \end{cases}$$

$$\begin{aligned} *2(3x+5)-7(2x+3) > 3x \\ 6x+10-14x-21-3x > 0 \\ -11x-11 > 0 \\ -11x > 11 \quad | :(-11) \\ x < -1 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -1)$$

$Рассмотрим функцию  $f(x) = (x-4)(x+7)$ .$

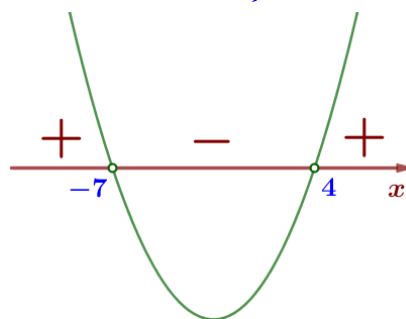
Нули функции:

$$\begin{aligned} (x-4)(x+7) &= 0 \\ x-4=0 \quad x+7=0 \\ x=4 \quad \quad x=-7 \end{aligned}$$

Изобразим схематически график функции

$$f(x) = (x-4)(x+7)$$

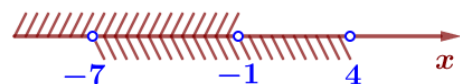
(парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$$f(x) < 0 \text{ при } x \in (-7; 4)$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ x \in (-7; 4) \end{cases}$$



$$x \in (-7; -1)$$

Ответ:  $x \in (-7; -1)$ .

**Пример 39.** Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x \end{cases}$$

т.к.  $4+(1-5x)^2 > 0$ , то получаем

равносильную систему:

$$\begin{cases} 8-x \geq 0, \\ -7x+2x \leq 23-3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -x \geq -8, & | :(-1) \\ -5x \leq 20 & | :(-5) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -4 \end{cases}$$



$$x \in [-4; 8]$$

Ответ:  $x \in [-4; 8]$ .

## 20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

### Блок 3. ФИПИ. Типовые экзаменационные варианты

### ПРИМЕРЫ

**Пример 40.** Решите уравнение  $x^6 = -(3-4x)^3$ .

$$x^6 = -(3-4x)^3$$

$$(x^2)^3 = (-(3-4x))^3$$

$$x^2 = -(3-4x)$$

$$x^2 = -3+4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

*Ответ: 1; 3.*

**Пример 41.** Решите неравенство  $-\frac{-31}{x^2-3x-10} \geq 0$ .

$$-\frac{-31}{x^2-3x-10} \geq 0$$

$$\frac{31}{x^2-3x-10} \geq 0$$

*т.к.  $31 > 0$  и  $x^2 - 3x - 10 \neq 0$ , то равносильным к данному будет неравенство  $x^2 - 3x - 10 > 0$*

*Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 - 3x - 10$ .*

*Нули функции:*

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

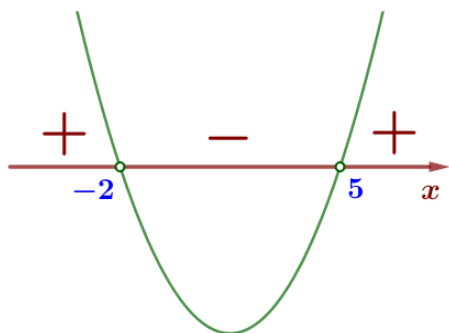
$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

*Изобразим схематически график функции*

$f(x) = x^2 - 3x - 10$  (парабола,  $a > 0$  - ветви вверх):



$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$$

*Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$ .*

**Пример 42.** Решите систему уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 82 + 2 \cdot 9$$

$$(x + y)^2 = 100$$

$$x + y = 10 \quad \text{или} \quad x + y = -10$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 9 \end{cases}$$

Составим и решим две системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 9$$

$$10x - x^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

$$a) \text{ при } x = 1$$

$$y = 10 - x = 10 - 1 = 9$$

$$b) \text{ при } x = 9$$

$$y = 10 - x = 10 - 9 = 1$$

$$2) \begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$y = -10 - x$$

$$x(-10 - x) = 9$$

$$-10x - x^2 = 9$$

$$x^2 + 10x + 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 8}{2} = -9$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 8}{2} = -1$$

$$b) \text{ при } x = -9$$

$$y = -10 - x = -10 + 9 = -1$$

$$c) \text{ при } x = -1$$

$$y = -10 - x = -10 + 1 = -9$$

Ответ:  $(1; 9); (9; 1); (-9; -1); (-1; -9)$ .