

12. Расчёты по формулам

Блок 1. ФИПИ ПРИМЕРЫ

Задание 1. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100 \cdot n$, где n – число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 7 колец.

$$\begin{aligned} n = 7 & & C = 6000 + 4100 \cdot n \\ C = ? & & C = 6000 + 4100 \cdot 7 = 6000 + 28700 = 34700 \text{ (руб.)} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 34700$$

Задание 2. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 150 + 12 \cdot (t - 5)$, где t – длительность поездки, выраженная в минутах ($t > 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 11-минутной поездки.

$$\begin{aligned} t = 11 \text{ мин} & & C = 150 + 12 \cdot (t - 5) \\ C = ? & & C = 150 + 12 \cdot (11 - 5) = 150 + 12 \cdot 6 = 150 + 72 = 222 \text{ (руб.)} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 222$$

Задание 3. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1,8t_C + 32$, где t_C – градусы Цельсия, t_F – градусы Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -45 градусов по шкале Цельсия?

$$\begin{aligned} t_C = -45 \text{ }^\circ\text{C} & & t_F = 1,8t_C + 32 \\ t_F = ? & & t_F = 1,8 \cdot (-45) + 32 = -81 + 32 = -49 \text{ (}^\circ\text{F)} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } -49$$

Задание 4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C – температура в градусах Цельсия, t_F – температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 113 градусов по шкале Фаренгейта?

$$\begin{aligned} t_F = 113 \text{ }^\circ\text{F} & & t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \\ t_C = ? & & t_C = \frac{5}{9}(113 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 81 = 45 \text{ (}^\circ\text{C)} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 45$$

Задание 5. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2 R$, где I – сила тока (в амперах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R , если мощность составляет 101,25 Вт, а сила тока равна 4,5 А. Ответ дайте в омах.

$$\begin{aligned} P = 101,25 \text{ Вт} & & P = I^2 R & \quad | : I^2 \\ I = 4,5 \text{ А} & & R = \frac{P}{I^2} \\ R = ? & & R = \frac{101,25}{4,5^2} = \frac{101,25}{4,5 \cdot 4,5} = \frac{10125}{45 \cdot 45} = 5 \text{ (Ом)} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 5$$

Задание 6. Центробежное ускорение при движении по окружности (в м/с²) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость (в с⁻¹), а R – радиус окружности. Пользуясь этой формулой, найдите радиус R (в метрах), если угловая скорость равна 7,5 с⁻¹, а центробежное ускорение равно 337,5 м/с². Ответ дайте в метрах.

$$\begin{aligned}
 a &= 337,5 \text{ м/с}^2 & a &= \omega^2 R \quad | : \omega^2 \\
 \omega &= 7,5 \text{ с}^{-1} & R &= \frac{a}{\omega^2} \\
 R &=? & R &= \frac{337,5}{7,5^2} = \frac{337,5}{7,5 \cdot 7,5} = \frac{3375 \cdot 10}{75 \cdot 75} = 6 \text{ (м)}
 \end{aligned}$$

Ответ: 6

Задание 7. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$, где d_1 и d_2 – длины диагоналей четырёхугольника, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2 , если $d_1 = 12$, $\sin \alpha = \frac{7}{9}$, а $S = 46,2$.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 12 & S &= \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2} \quad | \cdot 2 \\
 \sin \alpha &= \frac{7}{9} & 2S &= d_1 d_2 \sin \alpha \\
 S &= 46,2 & d_1 d_2 \sin \alpha &= 2S \quad | : d_1 \sin \alpha \\
 d_2 &=? & d_2 &= \frac{2S}{d_1 \sin \alpha} \\
 & & d_2 &= \frac{2 \cdot 46,2}{12 \cdot \frac{7}{9}} = \frac{2 \cdot 46,2 \cdot 9}{12 \cdot 7} = \frac{46,2 \cdot 3}{2 \cdot 7} = 9,9
 \end{aligned}$$

Ответ: 9,9

12. Расчёты по формулам

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

ПРИМЕРЫ

Задание 8. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n – число шагов, l – длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 60$ см, $n = 1300$? Ответ выразите в километрах.

$$\begin{aligned}
 n &= 1300 & s &= nl \\
 l &= 60 \text{ см} & s &= 1300 \cdot 60 = 78\,000 \text{ (см)} \\
 s &=? & 78\,000 \text{ см} &= 780 \text{ м} = 0,78 \text{ км}
 \end{aligned}$$

Ответ: 0,78

Задание 9. Период колебания математического маятника T (в секундах) приближенно можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l – длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 11 секунд.

$$\begin{aligned}
 T &= 11 \text{ с} & T &= 2\sqrt{l} \\
 l &=? & (T)^2 &= (2\sqrt{l})^2 \\
 & & T^2 &= 4l \quad | :4 \\
 l &= \frac{T^2}{4} & l &= \frac{11^2}{4} = \frac{121}{4} = 30\frac{1}{4} = 30\frac{25}{100} = 30,25 \text{ (м)}
 \end{aligned}$$

Ответ: 30,25

Задание 10. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F – сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 – величины зарядов (в кулонах), k – коэффициент пропорциональности (в $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$), а r – расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_2 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, $q_1 = 0,008 \text{ Кл}$, $r = 400 \text{ м}$, а $F = 0,225 \text{ Н}$.

$$\begin{aligned}
 k &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} & F &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad | \cdot r^2 \\
 q_1 &= 0,008 \text{ Кл} & Fr^2 &= k q_1 q_2 \quad | : k q_1 \\
 r &= 400 \text{ м} & q_2 &= \frac{Fr^2}{k q_1} = \frac{0,225 \cdot 400^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 0,008} = \frac{0,225 \cdot 16}{9 \cdot 10^5 \cdot 0,008} = \\
 F &= 0,225 \text{ Н} & &= \frac{225 \cdot 16}{9 \cdot 10^5 \cdot 8} = 0,0005 \text{ (Кл)} \\
 q_2 &=? & &
 \end{aligned}$$

Ответ: 0,0005

Задание 11. Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F – сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 – массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс (в метрах), а γ – гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Пользуясь формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 0,64032 \text{ Н}$, $m_2 = 4 \cdot 10^9 \text{ кг}$, а $r = 5 \text{ м}$.

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} & F &= \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad | \cdot r^2 \\
 F &= 0,64032 \text{ Н} & Fr^2 &= \gamma m_1 m_2 \quad | : \gamma m_2 \\
 m_2 &= 4 \cdot 10^9 \text{ Кл} & m_1 &= \frac{Fr^2}{\gamma m_2} = \frac{0,64032 \cdot 5^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^9} = \frac{0,64032 \cdot 25}{6,67 \cdot 10^{-2} \cdot 4} = \\
 r &= 5 \text{ м} & &= \frac{0,64032 \cdot 10000}{6,67 \cdot 16} = \frac{64032 \cdot 10}{667 \cdot 16} = 60 \text{ (кг)} \\
 m_1 &=? & &
 \end{aligned}$$

Ответ: 60

Задание 12. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P – давление (в паскалях), V – объём (в м³), ν – количество вещества (в молях), T – температура (в градусах Кельвина), а R – универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К·моль). Пользуясь этой формулой, найдите объём V (в м³), если $T = 300$ К, $P = 53\,848,8$ Па, $\nu = 32,4$ моль.

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$P = 53\,848,8 \text{ Па}$$

$$\nu = 32,4 \text{ моль}$$

$$V = ?$$

$$PV = \nu RT \quad | :P$$

$$V = \frac{\nu RT}{P}$$

$$V = \frac{32,4 \cdot 8,31 \cdot 300}{53\,848,8}$$

$$V = \frac{324 \cdot 831 \cdot 3}{53\,8488} = \frac{6 \cdot 54 \cdot 3 \cdot 277 \cdot 3}{18 \cdot 29916} = \frac{54 \cdot 3}{108}$$

$$V = 1,5 \text{ (м}^3\text{)}$$

Ответ: 1,5

Задание 13. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P – давление (в паскалях), V – объём (в м³), ν – количество вещества (в молях), T – температура (в градусах Кельвина), а R – универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К·моль). Пользуясь формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $P = 70\,219,5$ Па, $\nu = 29,9$ моль, $V = 2,3$ м³.

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$$

$$P = 70\,219,5 \text{ Па}$$

$$\nu = 29,9 \text{ моль}$$

$$V = 2,3 \text{ м}^3$$

$$T = ?$$

$$\nu RT = PV \quad | : \nu R$$

$$T = \frac{PV}{\nu R}$$

$$T = \frac{70219,5 \cdot 2,3}{29,9 \cdot 8,31} = \frac{702195 \cdot 230}{299 \cdot 831} =$$

$$= \frac{15 \cdot 46813 \cdot 23 \cdot 10}{23 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 277} = \frac{5 \cdot 169 \cdot 10}{13} = 650 \text{ (К)}$$

Ответ: 650

12. Расчёты по формулам

Блок 3. Типовые экзаменационные варианты

ПРИМЕРЫ

Задание 14. Высота деревянного стеллажа для книг равна $h = (a+b)n + a$ миллиметров, где a – толщина одной доски (в мм), b – высота одной полки (в миллиметрах), n – число таких полок. Найдите высоту книжного стеллажа из 8 полок, если $a = 18$ мм, $b = 310$ мм. Ответ выразите в миллиметрах.

$$n = 8$$

$$h = (a+b)n + a$$

$$a = 18 \text{ мм}$$

$$h = (18+310) \cdot 8 + 18 = 328 \cdot 8 + 18 = 2\,642 \text{ (мм)}$$

$$b = 310 \text{ мм}$$

$$h = ?$$

Ответ: 2642

Задание 15. Закон Гука можно записать в виде $F = kx$, где F – сила (в ньютонах), с которой сжимают пружину, x – абсолютное удлинение (сжатие) пружины (в метрах), а k – коэффициент упругости. Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $F = 80$ Н и $k = 5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

$$\begin{array}{l} F = 80 \text{ Н} \\ k = 5 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \\ x - ? \end{array} \quad \begin{array}{l} F = kx \quad | :k \\ x = \frac{F}{k} \\ x = \frac{80}{5} = 16 \text{ (м)} \end{array}$$

Ответ: 16

Задание 16. Закон Джоуля–Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q – количество теплоты (в джоулях), I – сила тока (в амперах), R – сопротивление цепи (в омах), а t – время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите время t (в секундах), если $Q = 816,75$ Дж, $I = 5,5$ А, $R = 9$ Ом.

$$\begin{array}{l} Q = 816,75 \text{ Дж} \\ I = 5,5 \text{ А} \\ R = 9 \text{ Ом} \\ t - ? \end{array} \quad \begin{array}{l} Q = I^2Rt \quad | :I^2R \\ t = \frac{Q}{I^2R} \\ t = \frac{816,75}{5,5^2 \cdot 9} = \frac{816,75}{5,5 \cdot 5,5 \cdot 9} = 3 \text{ (сек)} \end{array}$$

Ответ: 3

Задание 17. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = \frac{U^2}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите P (в ваттах), если $R = 9$ Ом, $U = 18$ В.

$$\begin{array}{l} R = 9 \text{ Ом} \\ U = 18 \text{ В} \\ P - ? \end{array} \quad \begin{array}{l} P = \frac{U^2}{R} \\ P = \frac{18^2}{9} = 36 \text{ (Вт)} \end{array}$$

Ответ: 36

Задание 18. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2t}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах), t – время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 8$ с, $U = 6$ В, $R = 2$ Ом.

$$\begin{array}{l} t = 8 \text{ с} \\ U = 6 \text{ В} \\ R = 2 \text{ Ом} \\ A - ? \end{array} \quad \begin{array}{l} A = \frac{U^2t}{R} \\ A = \frac{6^2 \cdot 8}{2} = 144 \text{ (Дж)} \end{array}$$

Ответ: 144

Задание 19. Кинетическая энергия тела (в джоулях) вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса тела (в килограммах), а v – его скорость (в метрах в секунду). Пользуясь этой формулой, найдите E (в джоулях), если $v = 5$ м/с и $m = 12$ кг.

$$\begin{aligned} v &= 5 \text{ м/с} \\ m &= 12 \text{ кг} \\ E &= ? \end{aligned} \quad E = \frac{mv^2}{2} \quad E = \frac{12 \cdot 5^2}{2} = 150 \text{ (Дж)}$$

Ответ: 150

Задание 20. Энергия заряженного конденсатора W (в Дж) вычисляется по формуле $W = \frac{CU^2}{2}$, где C – ёмкость конденсатора (в Ф), а U – разность потенциалов на обкладках конденсатора (в В). Найдите энергию конденсатора W (в Дж) ёмкостью 10^{-4} Ф, если разность потенциалов U на обкладках конденсатора равна 8 В.

$$\begin{aligned} C &= 10^{-4} \text{ Ф} \\ U &= 8 \text{ В} \\ W &= ? \end{aligned} \quad W = \frac{CU^2}{2} \quad W = \frac{10^{-4} \cdot 8^2}{2} = 0,0032 \text{ (Дж)}$$

Ответ: 0,0032

Задание 21. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a , b и c – стороны треугольника, а R – радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите S , если $a = 11$, $b = 13$, $c = 20$ и $R = \frac{65}{6}$.

$$\begin{aligned} a &= 11 \\ b &= 13 \\ c &= 20 \\ R &= \frac{65}{6} \\ S &= ? \end{aligned} \quad S = \frac{abc}{4R} \quad S = \frac{11 \cdot 13 \cdot 20}{4 \cdot \frac{65}{6}} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 6}{65} = 66$$

Ответ: 66

Задание 22. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b – катеты, а c – гипотенуза треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите c , если $a = 12$, $b = 35$ и $r = 5$.

$$\begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 35 \\ r &= 5 \\ c &= ? \end{aligned} \quad r = \frac{a+b-c}{2} \quad \left| \cdot 2 \right. \\ 2r &= a+b-c \\ c &= a+b-2r \quad c = 12+35-2 \cdot 5 = 37$$

Ответ: 37

Задание 23. Теорему косинусов можно записать в виде $\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, где a , b и c – стороны треугольника, а α – угол между сторонами a и b . Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos\alpha$, если $a=3$, $b=8$ и $c=7$.

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 8 \\ c &= 7 \\ \cos\alpha &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \cos\alpha &= \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 0,5$$

Задание 24. Длина медианы m_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c , если $a=4$, $b=7$ и $c=9$.

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 7 \\ c &= 9 \\ m_c &= \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} \\ m_c &= \frac{\sqrt{2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 7^2 - 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3,5 \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 3,5$$

Задание 25. Длина биссектрисы l_c , проведённой к стороне c треугольника со сторонами a , b и c , вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$. Найдите длину биссектрисы l_c , если $a=7$, $b=21$ и $c=26$.

$$\begin{aligned} a &= 7 \\ b &= 21 \\ c &= 26 \\ l_c &= \frac{1}{a+b} \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)} \\ l_c &= \frac{1}{7+21} \sqrt{7 \cdot 21 \cdot ((7+21)^2 - 26^2)} = \\ &= \frac{1}{28} \sqrt{7 \cdot 21 \cdot 108} = \frac{1}{28} \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 36} = \frac{1}{28} \cdot 126 = 4,5 \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 4,5$$

Задание 26. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} bcs \sin\alpha$, где b и c – две стороны треугольника, а α – угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите $\sin\alpha$, если $b=10$, $c=5$ и $S=20$.

$$\begin{aligned} b &= 10 \\ c &= 5 \\ S &= 20 \\ \sin\alpha &= \frac{2S}{bc} \\ S &= \frac{1}{2} bcs \sin\alpha \quad | \cdot 2 \\ 2S &= bcs \sin\alpha \quad | : bc \\ \sin\alpha &= \frac{2S}{bc} \quad \sin\alpha = \frac{2 \cdot 20}{10 \cdot 5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8 \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 0,8$$

Задание 27. Радиус описанной около треугольника окружности можно найти по формуле $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где a – сторона треугольника, α – противолежащий этой стороне угол, а R – радиус описанной около этого треугольника окружности. Пользуясь этой формулой, найдите R , если $a=7$, а $\sin\alpha = \frac{5}{14}$.

$$\begin{aligned} a &= 7 & R &= \frac{a}{2\sin\alpha} \\ \sin\alpha &= \frac{5}{14} & R &= \frac{7}{2 \cdot \frac{5}{14}} = \frac{7 \cdot 14}{2 \cdot 5} = \frac{98}{10} = 9,8 \\ R &=? \end{aligned}$$

Ответ: 9,8

Задание 28. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, где a и b – две стороны треугольников, а α и β – углы треугольника, лежащие против них соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите величину a , если $b=15$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

$$\begin{aligned} b &= 15 & \frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{b}{\sin\beta} \\ \sin\alpha &= \frac{4}{5} & a \cdot \sin\beta &= b \cdot \sin\alpha \quad | : \sin\beta \\ \sin\beta &= \frac{12}{13} & a &= \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} & a &= \frac{15 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{12}{13}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 13}{12} = 13 \\ a &=? \end{aligned}$$

Ответ: 13

Задание 29. Площадь прямоугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d^2 \sin\alpha}{2}$, где d – длина диагонали, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S , $d=12$ и $\sin\alpha = \frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned} d &= 12 & S &= \frac{d^2 \sin\alpha}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{5}{6} & S &= \frac{12^2 \cdot \frac{5}{6}}{2} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 5}{2} = 60 \\ S &=? \end{aligned}$$

Ответ: 60