14. Арифметические и геометрические прогрессии

Арифметические прогрессии

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом ($a_{n+1}=a_n+d$).

$$\underset{a_1}{1} \xrightarrow[+d]{+4} \underset{a_2}{5} \xrightarrow[+d]{+4} \underset{a_3}{9} \xrightarrow[+d]{+4} \underset{a_4}{13} \xrightarrow[+d]{+4} \underset{a_5}{17}$$

d – разность арифметической прогрессии:

$$d=a_{n+1}-a_n, \text{ т. е. } d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots$$

$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n=a_1+d(n-1)$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Геометрическая прогрессии

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и тоже не равное 0 число ($b_{n+1}=b_n\cdot q$).

$$\underset{b_1}{2} \xrightarrow[\cdot q]{\cdot 3} \underset{b_2}{6} \xrightarrow[\cdot q]{\cdot 3} \underset{b_3}{18} \xrightarrow[\cdot q]{\cdot 3} \underset{b_4}{54} \xrightarrow[\cdot q]{\cdot 3} \underset{b_5}{162}$$

q – знаменатель геометрической прогрессии:

$$q=\frac{b_{n+1}}{b_n}, \text{ т. е. } q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\ldots$$

$b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ Если все члены геометрической прогрессии положительны, то каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии ($q\neq 1$): $S_n=\dfrac{(q^n-1)\cdot b_1}{q-1}$.

ПРИМЕРЫ

Задание 1. В амфитеатре 15 рядов. В первом ряду 28 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в двенадцатом ряду амфитеатра?

Дано:

$a_1=28$

$d=3$

Найти:

a_{12} - ?

Решение:

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{12}=a_1+d\cdot 11$

$a_{12}=28+3\cdot 11=61$

Ответ: 61

Проверка:

$a_1=28$	$a_5=40$	$a_9=52$
$a_2=31$	$a_6=43$	$a_{10}=55$
$a_3=34$	$a_7=46$	$a_{11}=58$
$a_4=37$	$a_8=49$	$a_{12}=61$

Задание 2. При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на $7°$ C. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 4 минуты после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла $-13°$ C.

Дано:

$d=-7$

$a_{\text{нач}}=-13$

Найти:

a_4 - ?

Решение:

$a_1=a_{\text{нач}}+d$

$a_1=-13-7=-20$

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_4=a_1+d\cdot 3$

$a_4=-20-7\cdot 3=-20-21=-41$

Проверка:

$a_{\text{нач}}=-13$	$a_3=-34$
$a_1=-20$	$a_4=-41$
$a_2=-27$	

Ответ: –41

Задание 3. В амфитеатре 16 рядов, причём в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В пятом ряду 17 мест, а в девятом ряду 25 мест. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Дано:

$n=16$

$a_5=17$

$a_9=25$

Найти:

a_{16} - ?

Решение:

I способ

$a_9=a_5+4d$

$25=17+4d$

$4d=25-17$

$4d=8$

$d=8:4=2$

$a_{16}=a_9+7d$

$a_{16}=25+7\cdot 2=25+14=39$

Проверка:

$a_5=17$	$a_{11}=29$
$a_6=19$	$a_{12}=31$
$a_7=21$	$a_{13}=33$
$a_8=23$	$a_{14}=35$
$a_9=25$	$a_{15}=37$
$a_{10}=27$	$a_{16}=39$

II способ

$a_n=a_1+d(n-1)$

$\begin{cases} a_9=a_1+d\cdot 8, \\ a_5=a_1+d\cdot 4 \end{cases}$

$-\begin{cases} 25=a_1+8d \\ 17=a_1+4d \end{cases}$

$8=4d$

$d=8:4=2$

$17=a_1+4\cdot 2$

$a_1=17-8=9$

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{16}=a_1+d\cdot 15$

$a_{16}=9+2\cdot 15=9+30=39$

Ответ: 39

Задание 4. В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 24 места, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?

Дано:

$n=14$

$a_1=24$

$d=2$

Найти:

S_{14} - ?

Решение:

$a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{14}=24+2\cdot13=24+26=50$

$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$S_{14}=\dfrac{a_1+a_{14}}{2}\cdot14$

$S_{14}=\dfrac{24+50}{2}\cdot14=74\cdot7=518$

Ответ: 518

Проверка:

$a_1=24$	$a_9=40$
$a_2=26$	$a_{10}=42$
$a_3=28$	$a_{11}=44$
$a_4=30$	$a_{12}=46$
$a_5=32$	$a_{13}=48$
$a_6=34$	$a_{14}=50$
$a_7=36$	$S_{14}=(24+50)\cdot7$
$a_8=38$	$S_{14}=518$

Задание 5. Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 6 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые восемь секунд?

Дано:

$a_1=6$

$d=10$

$n=8$

Найти:

S_8 - ?

Решение:

$a_n=a_1+d(n-1)$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$a_8=6+10\cdot7=6+70=76$

$S_8=\dfrac{a_1+a_7}{2}\cdot8$

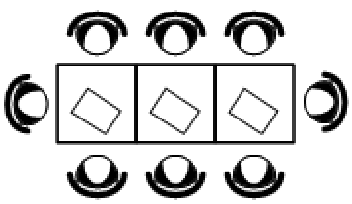
$S_8=\dfrac{6+76}{2}\cdot8=82\cdot4=328$

Проверка:

$a_1=6$	$a_6=56$
$a_2=16$	$a_7=66$
$a_3=26$	$a_8=76$
$a_4=36$	$S_8=(6+76)\cdot4$
$a_5=46$	$S_8=328$

Ответ: 328

Задание 6. В кафе есть только квадратные столики, за каждый из которых могут сесть 4 человека. Если сдвинуть два квадратных столика, то получится стол, за который могут сесть 6 человек. На рисунке изображён случай, когда сдвинули 3 квадратных столика вдоль одной линии. В этом случае получился стол, за который могут сесть 8 человек. Сколько человек может сесть за стол, который получится, если сдвинуть 15 квадратных столиков вдоль одной линии?



Дано:

$a_1=4$

$a_2=6$

$a_3=8$

Найти:

a_{15} - ?

Решение:

$d=a_2-a_1=6-4=2$

$a_n=a_1+d(n-1)$

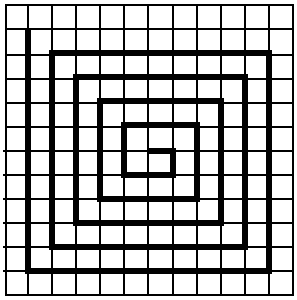
$a_{15}=4+2\cdot14=4+28=32$

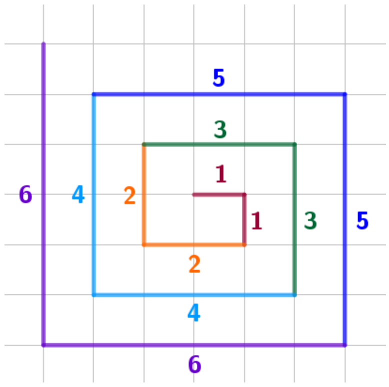
Ответ: 32

Проверка:

$a_1=4$	$a_6=14$	$a_{11}=24$
$a_2=6$	$a_7=16$	$a_{12}=26$
$a_3=8$	$a_8=18$	$a_{13}=28$
$a_4=10$	$a_9=20$	$a_{14}=30$
$a_5=12$	$a_{10}=22$	$a_{15}=32$

Задание 7. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.





$n=10 \qquad l_{10}=1+1+2+2+3+3+\ldots+9+9+10+10=$

$=(1+2+3+\ldots+9+10)\cdot 2=S_{10}\cdot 2$

$n=120 \qquad l_{120}=(1+2+3+\ldots+119+120)\cdot 2=S_{120}\cdot 2$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \qquad a_1=1 \qquad a_n=120 \qquad n=120$$

$$S_{120}=\frac{1+120}{2}\cdot 120=121\cdot 60=7260$$

$$l_{120}=S_{120}\cdot 2=7260\cdot 2=14520$$

Ответ: 14520

Задание 8. У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 270 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 10 см?

Дано:

$b_1=270$

$q=\frac{1}{3}$

$b_n<10$

Найти:

n - ?

Решение:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=270\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<10$$

$$270\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<10 \qquad |:270$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{10}{270}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{27}$$

при $n=3$: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{9}>\frac{1}{27}$

при $n=4$: $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{1}{27}=\frac{1}{27}$

при $n=5$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{81}<\frac{1}{27}\Rightarrow\ n=5$

Проверка:

$b_1=270$

$b_2=90$

$b_3=30$

$b_4=10$

$b_5=3\frac{1}{3}<10$

$n=5$

Ответ: 5

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

Задание 9. У Яны есть попрыгунчик (каучуковый шарик). Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока попрыгунчик подлетел на высоту 320 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в два раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит попрыгунчик, станет меньше 6 см?

Дано:

$b_1 = 320$

$q = \frac{1}{2}$

$b_n < 6$

Найти:

n - ?

Решение:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 320 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 6$

$320 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 6 \qquad |:320$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{6}{320}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{3}{160} < \frac{4}{160}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{40}$

при $n = 6$: $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} > \frac{1}{40}$

при $n = 7$: $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{40} \Rightarrow n = 7$

Проверка:

$b_1 = 320$

$b_2 = 160$

$b_3 = 80$

$b_4 = 40$

$b_5 = 20$

$b_6 = 10$

$b_7 = 5 < 6$

$n = 7$

Ответ: 7

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

Задание 10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 6 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 480 мг. Найдите массу изотопа через 36 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$q = \frac{1}{2}$

$t_1 = 6$

$b_{нач} = 480$

$t_n = 36$

Найти:

b_n - ?

Решение:

$n = t_n : t_1 = 36 : 6 = 6$

$b_1 = b_{нач} \cdot q$

$b_1 = 480 \cdot \frac{1}{2} = 240$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_6 = b_1 \cdot q^5$

$b_6 = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{240}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{2} = \frac{75}{10} = 7{,}5$

Проверка:

$b_{нач} = 480$

$t_1 = 6$: $b_1 = 240$

$t_2 = 12$: $b_2 = 120$

$t_3 = 18$: $b_3 = 60$

$t_4 = 24$: $b_4 = 30$

$t_5 = 30$: $b_5 = 15$

$t_6 = 36$: $b_6 = 7{,}5$

Ответ: 7,5

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

Задание 11. В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 12 мг. За каждые 20 минут масса колонии увеличивается в 3 раза. Найдите массу колонии микроорганизмов через 100 минут после начала эксперимента. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$b_{нач}=12$
$t_1=20$
$q=3$
$t_n=100$

Найти:

b_n - ?

Решение:

$n=t_n:t_1=100:20=5$
$b_1=b_{нач}\cdot q$
$b_1=12\cdot 3=36$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
$b_5=b_1\cdot q^4$
$b_6=36\cdot 3^4=36\cdot 81=2916$

Проверка:

$b_{нач}=12$
$t_1=20:\quad b_1=36$
$t_2=40:\quad b_2=108$
$t_3=60:\quad b_3=324$
$t_4=80:\quad b_4=972$
$t_5=100:\quad b_5=2916$

Ответ: 2916

Задание 12. В ходе бета-распада радиоактивного изотопа А каждые 7 минут половина его атомов без потери массы преобразуются в атомы стабильного изотопа Б. В начальный момент масса изотопа А составляла 960 мг. Найдите массу образовавшегося изотопа Б через 42 минуты. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$t_1=7$
$q=\frac{1}{2}$
$b_{нач}=m_А=960$
$t_n=42$

Найти:

$m_Б$ - ?

Решение:

$n=t_n:t_1=42:7=6$
$b_1=b_{нач}\cdot q$
$b_1=960\cdot\frac{1}{2}=480$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
$b_6=b_1\cdot q^5$
$b_6=480\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{480}{1}\cdot\frac{1}{32}=\frac{15}{1}=15$
$m_Б=960-b_6=960-15=945$

Проверка:

	$m_А$	$m_Б$
нач	**960**	**0**
$t_1=7$	480	480
$t_2=14$	240	720
$t_3=21$	120	840
$t_4=28$	60	900
$t_5=35$	30	930
$t_6=42$	15	945

Ответ: 945