

15. Треугольники

УГЛЫ



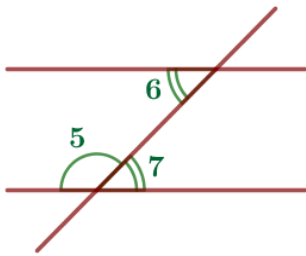
Сумма смежных углов равна 180° :

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$



Вертикальные углы равны:

$$\angle 3 = \angle 4.$$



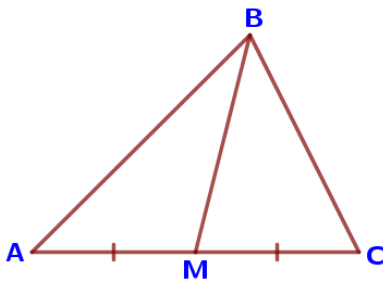
Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

а) сумма односторонних углов равна 180° :

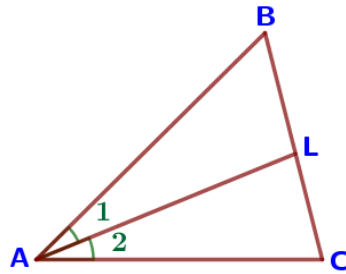
$$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ;$$

б) накрест лежащие углы равны: $\angle 6 = \angle 7$.

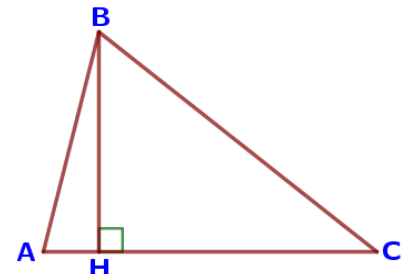
Треугольник произвольный



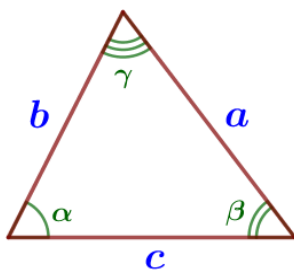
BM – медиана
AM = MC



AL – биссектриса
 $\angle 1 = \angle 2$



BH – высота
 $BH \perp AC$

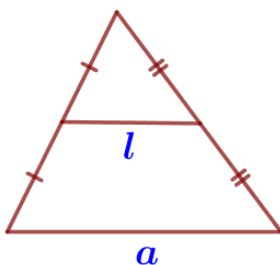


Сумма углов треугольника равна 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Периметр – сумма длин всех сторон:

$$P = a + b + c.$$

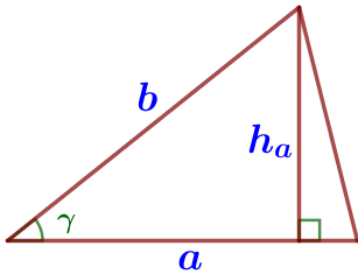


Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны:

$$l \parallel a, \quad l = \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}.$$

Три средние линии делят треугольник на четыре равных треугольника, подобных данному.

Площадь треугольника равна...

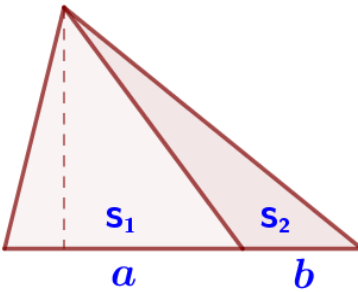


а) половине произведения его основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = lh_a.$$

б) половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

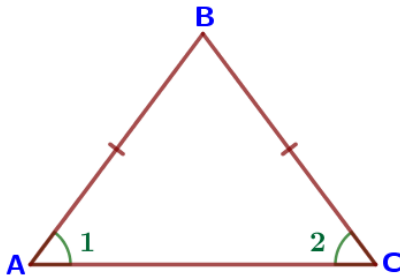
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma.$$



Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся, как основания:

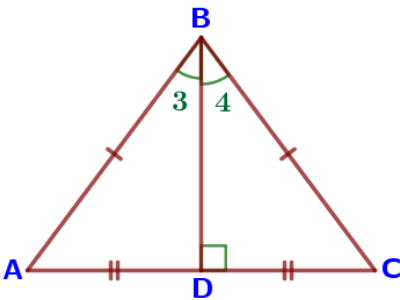
$$S_1 : S_2 = a : b.$$

Треугольник равнобедренный



В равнобедренном треугольнике углы при основании равны:

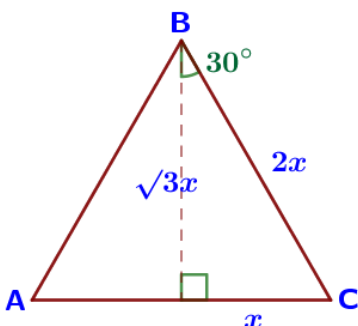
$$\angle 1 = \angle 2.$$



В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой:

- BD – биссектриса ($\angle 3 = \angle 4$),
- BD – медиана ($AD = CD$),
- BD – высота ($BD \perp AC$).

Треугольник равносторонний

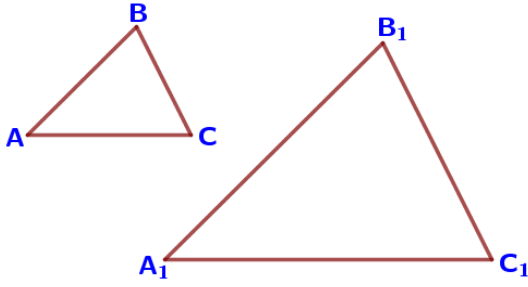


В равностороннем треугольнике все углы равны:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ.$$

Каждая медиана в равностороннем треугольнике совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.

Подобные треугольники

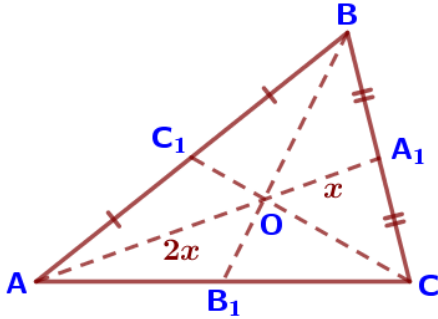


Углы подобных треугольников соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого:

$$\angle A = \angle A_1 \quad \angle B = \angle B_1 \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

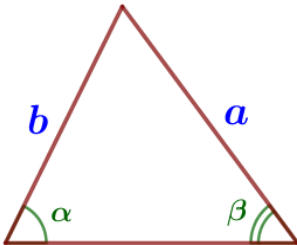
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2.$$



Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины:

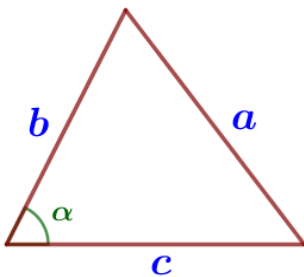
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{2}{1}.$$

Соотношение сторон треугольника



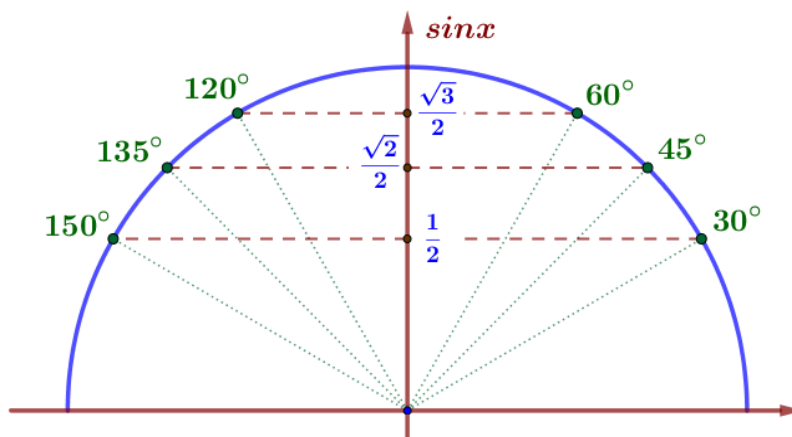
Теорема синусов: стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

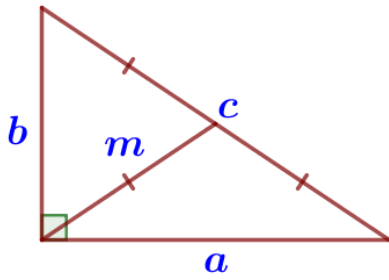


Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$



Треугольник прямоугольный



Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$m = \frac{c}{2}.$$

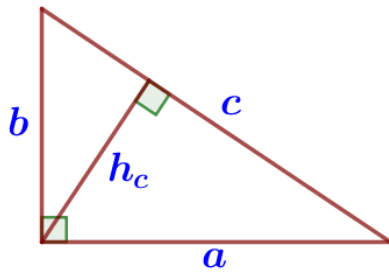
Площадь прямоугольного треугольника равна ...

а) половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

б) половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней:

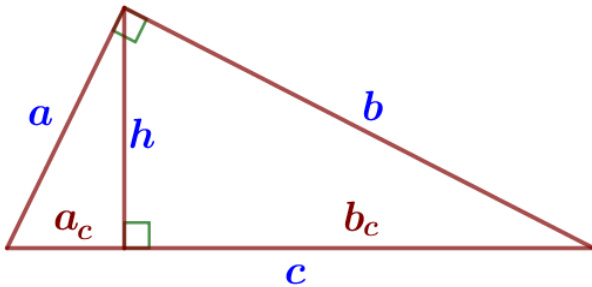
$$S = \frac{1}{2}ch_c.$$



Пропорциональные отрезки:

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c \quad b^2 = b_c \cdot c$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

