

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 1. ФИПИ

Задание 1. Найдите значение выражения при данном условии:

- | | |
|--|--|
| 1) $31a - 4b + 55$, если $\frac{a - 4b + 7}{4a - b + 7} = 8$; | 4) $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$; |
| 2) $19a - 7b + 12$, если $\frac{5a - 8b + 2}{8a - 5b + 2} = 3$; | 5) $25a - 5b + 22$, если $\frac{3a - 7b + 6}{7a - 3b + 6} = 4$; |
| 3) $39a - 15b + 25$, если $\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$; | 6) $41a - 11b + 15$, если $\frac{4a - 9b + 3}{9a - 4b + 3} = 5$. |

Задание 2. Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; | 7) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$; |
| 2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; | 8) $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$; |
| 3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$; | 9) $x^3 + 7x^2 = 4x + 28$; |
| 4) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$; | 10) $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$; |
| 5) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$; | 11) $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$; |
| 6) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$; | 12) $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$. |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $x^2 - 2x + \sqrt{4 - x} = \sqrt{4 - x} + 15$; | 7) $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$; |
| 2) $x^2 - 3x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 10$; | 8) $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$; |
| 3) $x^2 - 2x + \sqrt{6 - x} = \sqrt{6 - x} + 35$; | 9) $x(x^2 + 2x + 1) = 6(x + 1)$; |
| 4) $x^2 - 3x + \sqrt{5 - x} = \sqrt{5 - x} + 18$; | 10) $x(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)$; |
| 5) $x^2 - 2x + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - x} + 3$; | 11) $x(x^2 + 4x + 4) = 8(x + 2)^*$; |
| 6) $x^2 - 6x + \sqrt{6 - x} = \sqrt{6 - x} + 7$; | 12) $x(x^2 + 6x + 9) = 10(x + 3)^*$. |

Задание 4. Решите уравнение:

- | | |
|--|--|
| 1) $(x - 1)(x^2 + 8x + 16) = 6(x + 4)$; | 7) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 6x - 7)^2 = 0$; |
| 2) $(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 4(x + 2)$; | 8) $(x^2 - 9)^2 + (x^2 - 2x - 15)^2 = 0$; |
| 3) $(x - 2)(x^2 + 6x + 9) = 6(x + 3)$; | 9) $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 3x - 10)^2 = 0$; |
| 4) $(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 4(x + 1)$; | 10) $(x^2 - 36)^2 + (x^2 + 4x - 12)^2 = 0$; |
| 5) $(x - 1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x + 3)$; | 11) $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 2x - 15)^2 = 0$; |
| 6) $(x - 2)(x^2 + 8x + 16) = 7(x + 4)$; | 12) $(x^2 - 49)^2 + (x^2 + 4x - 21)^2 = 0$. |

Задание 5. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0;$

7) $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} - 6 = 0;$

2) $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0;$

8) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} - 12 = 0;$

3) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3 = 0;$

9) $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{3}{x-3} - 4 = 0;$

4) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0;$

10) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - 10 = 0;$

5) $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0;$

11) $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x-2} - 14 = 0^*;$

6) $\frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} - 14 = 0^*;$

12) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - 3 = 0.$

Задание 6. Решите уравнение:

1) $(x+4)^4 - 6(x+4)^2 - 7 = 0;$

7) $x^4 = (x-20)^2;$

2) $(x-2)^4 - (x-2)^2 - 6 = 0;$

8) $x^4 = (3x-10)^2;$

3) $(x+3)^4 - 2(x+3)^2 - 8 = 0;$

9) $x^4 = (4x-5)^2;$

4) $(x-4)^4 - 4(x-4)^2 - 21 = 0;$

10) $x^4 = (2x-15)^2;$

5) $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0;$

11) $x^4 = (x-6)^2;$

6) $(x-3)^4 - 3(x-3)^2 - 10 = 0;$

12) $x^4 = (3x-4)^2.$

Задание 7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31, \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y, \\ 9x - 14 = y; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50, \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25, \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61, \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 5; \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x^2 + y = 9, \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21, \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x. \end{cases}$

Задание 8. Решите неравенство:

1) $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1);$

7) $\frac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0;$

13) $\frac{-14}{x^2+2x-15} \leq 0;$

2) $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8);$

8) $\frac{-18}{(x+4)^2-10} \geq 0;$

14) $\frac{-19}{x^2+x-12} \leq 0;$

3) $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5);$

9) $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0;$

15) $\frac{-25}{x^2+9x-10} \leq 0^*;$

4) $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6);$

10) $\frac{-16}{(x+2)^2-5} \geq 0;$

16) $\frac{-23}{x^2+6x-16} \leq 0^*.$

5) $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3);$

11) $\frac{-13}{(x-4)^2-6} \geq 0;$

6) $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4);$

12) $\frac{-15}{(x+1)^2-3} \geq 0;$

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

Задание 1. Упростите выражение:

$$1) \frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}; \quad 2) \frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}; \quad 3) \frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-3}}; \quad 4) \frac{72^{n+1}}{2^{n+3} \cdot 6^{2n+1}}.$$

Задание 2. Сократите дробь:

$$1) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right); \quad 4) \frac{p(a)}{p(6-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(6-c)}{c-3};$$

$$2) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right)\left(5b + \frac{1}{b}\right); \quad 5) \frac{p(a)}{p(8-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(8-c)}{c-4};$$

$$3) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{10}{b}\right)\left(10b + \frac{1}{b}\right); \quad 6) \frac{p(a)}{p(20-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(20-c)}{c-10}.$$

Задание 3. Сократите дробь:

$$1) \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{(x-3)(x+2)} \quad 3) \frac{x^3 - 6x^2 - 4x + 24}{(x-6)(x-2)} \quad 5) \frac{ab - 5b + 10 - 2a}{a^2 - 25} \quad 7) \frac{a^2 - 4}{ab - 2b - 3a + 6}$$

$$2) \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{(x-2)(x+3)} \quad 4) \frac{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}{(x-5)(x+3)} \quad 6) \frac{ab - 3b + 6 - 2a}{a^2 - 9} \quad 8) \frac{a^2 - 16}{ab - 4b - 3a + 12}$$

Задание 4. Решите уравнение:

$$1) (2x-2)^2(x-2) = (2x-2)(x-2)^2; \quad 9) (x+5)^3 = 25(x+5);$$

$$2) (x-8)(4x-8)^2 = (x-8)^2(4x-8); \quad 10) (x+2)^3 = 4(x+2);$$

$$3) (2x-5)^2(x-5) = (2x-5)(x-5)^2; \quad 11) (x+4)^3 = 16(x+4);$$

$$4) (x+3)(4x+2)^2 = (4x+2)(x+3)^2; \quad 12) (x+9)^3 = 81(x+9);$$

$$5) (x-2)(x-3)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5); \quad 13) 3x^2 - 7x + 29 = (x+4)^2;$$

$$6) (x-7)(x-4)(x-6) = (x-7)(x-3)(x-6); \quad 14) 4x^2 - 9x + 12 = (x+6)^2;$$

$$7) (x+2)(x-13)(x-4) = (x+2)(x-5)(x-13); \quad 15) -3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2;$$

$$8) (x-4)(x+5)(x+7) = (x+5)(x+7)(x-2); \quad 16) -4x^2 - 7x + 12 = (x-2)^2.$$

Задание 5. Решите уравнение:

$$1) x^6 = (6x-5)^3; \quad 4) x^3 = 3x^2 + 4x; \quad 7) (x-2)^2(x-3) = 20(x-2);$$

$$2) x^6 = (7x-12)^3; \quad 5) x^3 = 2x^2 + 8x; \quad 8) (x-2)^2(x-3) = 12(x-2).$$

$$3) x^6 = (6x-8)^3; \quad 6) x^3 = 4x^2 + 5x;$$

Задание 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} (x+6y)^2 = 7y, \\ (x+6y)^2 = 7x; \end{cases} & 2) \begin{cases} (2x+6y)^2 = 8y, \\ (2x+6y)^2 = 8x; \end{cases} & 3) \begin{cases} (2x+y)^2 = 3y, \\ (2x+y)^2 = 3x; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} y-2x=6, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases} & 5) \begin{cases} 3x-y=10, \\ x^2+xy-y^2=20; \end{cases} & 6) \begin{cases} y-x=-5, \\ x^2-2xy-y^2=17. \end{cases}
 \end{array}$$

Задание 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{llll}
 1) \begin{cases} 2x-y=-8, \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = -1; \end{cases} & 5) \begin{cases} x^2+y=5, \\ 6x^2-y=2; \end{cases} & 9) \begin{cases} (x-4)(y-6)=0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2; \end{cases} & 13) \begin{cases} x^2=2y+3, \\ x^2+6=2y+y^2; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} 3x+y=1, \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{5} = 2; \end{cases} & 6) \begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1; \end{cases} & 10) \begin{cases} (x-8)(y-9)=0, \\ \frac{y-5}{x+y-13} = 4; \end{cases} & 14) \begin{cases} x^2=11y+3, \\ x^2+1=11y+y^2; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 3x-y=15, \\ \frac{x+6}{2} - \frac{y}{3} = 6; \end{cases} & 7) \begin{cases} 2x^2+y=4, \\ 4x^2-y=2; \end{cases} & 11) \begin{cases} (x-6)(y-7)=0, \\ \frac{y-4}{x+y-10} = 3; \end{cases} & 15) \begin{cases} x^2=10y+6, \\ x^2+3=10y+y^2; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x-2y=-8, \\ \frac{x}{4} + \frac{y-2}{3} = -1; \end{cases} & 8) \begin{cases} 3x^2+y=6, \\ 4x^2-y=1; \end{cases} & 12) \begin{cases} (x-4)(y-7)=0, \\ \frac{y-5}{x+y-9} = 2; \end{cases} & 16) \begin{cases} x^2=17y+2, \\ x^2+2=17y+y^2. \end{cases}
 \end{array}$$

Задание 8. Решите неравенство:

$$\begin{array}{lll}
 1) (x-3)(2x+3) < -7; & 5) (4x-6)^2 \geq (6x-4)^2; & 9) x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64); \\
 2) (2x+1)(x-1) > 9; & 6) (5x-8)^2 \geq (8x-5)^2; & 10) x^2(-x^2-49) \leq 49(-x^2-49); \\
 3) (x-1)(3x-5) < 1; & 7) (3x-5)^2 \geq (5x-3)^2; & 11) x^2(-x^2-25) \leq 25(-x^2-25); \\
 4) (3x-2)(x+4) > -11; & 8) (2x-7)^2 \geq (7x-2)^2; & 12) x^2(-x^2-9) \leq 9(-x^2-9).
 \end{array}$$

Задание 9. Решите неравенство:

$$1) \frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}; \quad 2) \frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3}; \quad 3) \frac{x^2}{3} \geq \frac{8x-9}{5}; \quad 4) \frac{x^2}{2} < \frac{11x-4}{5}.$$

Задание 10. Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4(9x+3) - 9(4x+3) > 3x, \\ (x-2)(x+9) < 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} (6x+2) - 6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0. \end{cases}$$

Задание 11. Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{7-7x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{3-x}{1+(5-x)^2} \geq 0, \\ 8-7x \leq 12-3x; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{2-2x}{8+(2-6x)^2} \geq 0, \\ 5-9x \leq 37-5x. \end{cases}$$