

09. Уравнения

Часть 1. ФИПИ

ТЕОРИЯ и ПРИМЕРЫ

Определения

Уравнение – равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, значение которого надо найти.

Корень уравнения – значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение – найти все его корни или установить, что их нет.

Линейные уравнения

Общий вид:

$$ax = b$$

Решение:

А) если $a \neq 0$, то $x = b : a = \frac{b}{a}$;

Б) если $a = b = 0$, то x – любое число;

В) если $a = 0, b \neq 0$, то нет корней.

Пример 1. Найдите корень уравнения:

1) $10x = -80$,

$$10x = -80$$

$$x = -80 : 10$$

$$x = -8$$

2) $7x = 0$,

$$7x = 0$$

$$x = 0 : 7$$

$$x = 0$$

3) $40x = 3$.

$$40x = 3$$

$$x = 3 : 40$$

$$x = \frac{3}{40}$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Теорема 1. Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Следствие. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Пример 2. Найдите корень уравнения $12 - 3x = -4x + 7$.

$$12 - 3x = -4x + 7$$

$$-3x + 4x = 7 - 12$$

$$x = -5$$

Ответ: -5

Пример 3. Найдите корень уравнения $3(x-8) = -6 + x$.

$$\begin{aligned} 3(x-8) &= -6 + x \\ 3x - 24 &= -6 + x \\ 3x - x &= -6 + 24 \\ 2x &= 18 \quad |:2 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Ответ: 9

Пример 4. Найдите корень уравнения $x - \frac{x}{14} = \frac{13}{7}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^{(14)}}{1} - \frac{x^{(1)}}{14} &= \frac{13^{(2)}}{7} \\ \frac{14x}{14} - \frac{x}{14} &= \frac{26}{14} \quad | \cdot 14 \\ 14x - x &= 26 \\ 13x &= 26 \quad |:13 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2

Правило пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Пример 5. Найдите корень уравнения $\frac{20}{x+4} = -\frac{8}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{20}{x+4} &= -\frac{8}{3} \quad |:4 \\ \frac{5}{x+4} &= -\frac{2}{3} \\ x+4 \neq 0 \quad x &\neq -4 \\ \text{по правилу пропорции:} \\ 5 \cdot 3 &= (x+4) \cdot (-2) \\ 15 &= -2x - 8 \\ 2x &= -8 - 15 \\ 2x &= -23 \quad |:2 \\ x &= -11,5 \end{aligned}$$

Ответ: -11,5

Пример 6. Найдите корень уравнения $\frac{9}{x-7} = -10$.

$$\begin{aligned} \frac{9}{x-7} &= -\frac{10}{1} \\ x-7 \neq 0 \quad x &\neq 7 \\ \text{по правилу пропорции:} \\ 9 \cdot 1 &= (x-7) \cdot (-10) \\ 9 &= -10x + 70 \\ 10x &= 70 - 9 \\ 10x &= 61 \quad |:10 \\ x &= 6,1 \end{aligned}$$

Ответ: 6,1

Квадрат суммы/разности:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

или

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= (x-3)(x-3) = x^2 - \underline{3x} - \underline{3x} + 9 = \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

Пример 7. Найдите корень уравнения $(x+4)^2 = (11-x)^2$.

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= (11-x)^2 \\ (x+4)(x+4) &= (11-x)(11-x) \\ x^2 + 4x + 4x + 16 &= 121 - 11x - 11x + x^2 \\ x^2 + 4x + 4x + 11x + 11x - x^2 &= 121 - 16 \\ 30x &= 105 \quad |:30 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Ответ: 3,5

Квадратные уравнения:

Неполные

$$ax^2 = 0, \\ b = 0, c = 0$$

$$ax^2 \pm bx = 0, \\ c = 0$$

$$ax^2 \pm c = 0, \\ b = 0$$

$$x^2 = 0 \\ x = 0$$

(!) Есть общий мно-
житель?

$$ax^2 \pm bx = 0 \\ x(ax \pm b) = 0 \\ x = 0 \quad ax \pm b = 0 \\ \dots$$

Разность квадратов?

(!) да

(!) нет

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

корней нет

$$(\sqrt{ax})^2 - (\sqrt{c})^2 = 0$$

$$(\sqrt{ax} - \sqrt{c})(\sqrt{ax} + \sqrt{c}) = 0$$

$$\sqrt{ax} - \sqrt{c} = 0 \quad \sqrt{ax} + \sqrt{c} = 0$$

...

...

Пример 8. Решите уравнение $(4x - 3)(-x + 11) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$(4x - 3)(-x + 11) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$4x - 3 = 0$$

$$-x + 11 = 0$$

$$4x = 3 \quad |:4$$

$$-x = -11 \quad |:(-1)$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$x = 11$$

меньший корень

Ответ: 0,75

Пример 9. Решите уравнение $6x^2 + 54x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$6x^2 + 54x = 0$$

$$6x(x + 9) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$6x = 0 \quad |:6$$

$$x + 9 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -9$$

больший корень

Ответ: 0

Пример 10. Решите уравнение $x^2 - 400 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 - 400 = 0$$

$$x^2 - (20)^2 = 0 \text{ — разность квадратов}$$

$$(x - 20)(x + 20) = 0$$

$$x - 20 = 0$$

$$x + 20 = 0$$

$$x = 20$$

$$x = -20$$

меньший корень

Ответ: -20

Пример 11. Решите уравнение $8x^2 - 56x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$8x^2 - 56x = 0$$

$$8x(x - 7) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$8x = 0 \quad |:8$$

$$x - 7 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 7$$

больший корень

Ответ: 7

Квадратные уравнения:**Полные**

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$1) D > 0 \quad 2 \text{ корня} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$2) D = 0 \quad 1 \text{ корень} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

$$3) D < 0 \quad \text{корней нет}$$

Приведенное:

$$x^2 + px + q = 0$$

Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Пример 12. Решите уравнение $x^2 + 48 = 14x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 + 48 = 14x$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 48, \\ x_1 + x_2 = +14 \end{cases}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6 - \text{меньший корень}$$

Ответ: 6

Пример 13. Решите уравнение $x^2 - 27 = 6x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2 - 27 = 6x$$

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -27, \\ x_1 + x_2 = +6 \end{cases}$$

$$x_1 = 9 - \text{больший корень}$$

$$x_2 = -3$$

Ответ: 9

Пример 14. Решите уравнение $4x^2 - 14x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$4x^2 - 14x - 18 = 0 \quad |:2$$

$$2x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -7 \quad c = -9$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 49 + 72 = 121 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7 + 11}{4} = 4,5$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7 - 11}{4} = -1 \text{ (меньш.)}$$

Ответ: -1

Пример 15. Решите уравнение $5x^2 + 12x + 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$5x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$a = 5 \quad b = 12 \quad c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 144 - 80 = 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 + 8}{10} = -0,4 \text{ (больш.)}$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 - 8}{10} = -2$$

Ответ: -0,4