Конспект по математике

6 класс

Составитель: Е. А. Ширяева

Материал подготовлен на основе УМК «Математика 6 класс»
авторы: А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир

2021 г

Глава 1. Делимость натуральных чисел

§ 1. Делители и кратные

30 делится на 5

Натуральное число *a* делится нацело на натуральное число *b*, если найдётся натуральное число с такое, что справедливо равенство $a=b\cdot c$.

42 кратно 6
6 – делитель 42

Если натуральное число *a* делится нацело на натуральное число *b*, то число *a* называют кратным числа *b*, а число *b* – делителем числа *a*.

Определения

Кратным натурального числа *a* называют натуральное число, которое делится без остатка (нацело) на *a*.

Делителем натурального числа *a* называют натуральное число, на которое *a* делится без остатка (нацело).

7, 14, 21… кратно 7

9, 18, 27… кратно 9

Для любого натурального числа *a* каждое из чисел $a\cdot 1$, $a\cdot 2$, $a\cdot 3$, $a\cdot 4$, … является кратным числа *a*.

1 и 73 – делители числа 73

Наименьшим делителем любого натурального числа *a* является число 1, а наибольшим – само число *a*.

Делимость суммы

Если каждое из чисел *a* и *b* делится нацело на число *k*, то и сумма $a+b$ также делится нацело на число *k*.

Пример 1

21 делится на 3
18 делится на 3
(21+18) делится на 3

Если ни число *a* и ни число *b* не делятся нацело на число *k*, то их сумма $a+b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число *k*.

Пример 2

12 не делится на 5
13 не делится на 5
(12+13) <u>делится</u> на 5

Пример 3

12 не делится на 5
14 не делится на 5
(12+14) <u>не делится</u> на 5

Если число *a* делится нацело на число *k*, а число *b* не делится нацело на число *k*, то сумма $a+b$ не делится нацело на число *k*.

Пример 4

35 делится на 7
15 не делится на 7
(35+15) не делится на 7

§ 2. Признаки делимости на 10, на 5 и на 2

Признак делимости на 10

Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10.

Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то число не делится нацело на 10.

делятся на 10	не делятся на 10
10, 80, 100, 1480	12, 81,105,1488

Определения:

Натуральные числа, которые нацело делятся на 2, называют **чётными**.

Натуральные числа, которые не делятся нацело на 2, называют **нечётными**.

четные цифры	нечетные цифры
0, 2, 4, 6, 8	1, 3, 5, 7, 9

Признак делимости на 2

Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2.

Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

делятся на 2	не делятся на 2
12, 34, 168, 3596	15, 37, 161, 3599

Признак делимости на 5

Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5.

Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

делятся на 5	не делятся на 5
15, 45, 365, 9175	15, 37, 161, 3599

§ 3. Признаки делимости на 9 и на 3

Признак делимости на 9

Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9.

Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

делятся на 9	не делятся на 9
27, 108, 441, 9513	28, 209, 780, 2325

Признак делимости на 3

Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3.

Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

делятся на 3	не делятся на 3
27, 111, 708, 2325	37, 161, 365, 9175

Это интересно!

Признак делимости на 4

Если две последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 4, то и само число делится нацело на 4.

делятся на 4	не делятся на 4
108, 1500, 3596, 75344	209, 1401, 7022, 10434

Признак делимости на 25

Если две последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 25, то и само число делится нацело на 25.

делятся на 25	не делятся на 25
125, 275, 8250, 11100	140, 355, 7777, 11001

Признак делимости на 8

Если три последние цифры числа нули или выражают число, делящееся нацело на 8, то и само число делится нацело на 8.

делятся на 8	не делятся на 8
3800, 5016, 37240	4002, 9034, 25700

Правило

Если число a делится нацело на числа p и q, и при этом у чисел p и q нет общих делителей, кроме 1, то число a делится нацело на произведение pq.

Признак делимости на 6

Если число делится нацело на 2 и на 3, то оно делится нацело и на 6.

делятся на 6	не делятся на 6
54, 132, 2034, 7320	34, 111, 2325, 3596

Признак делимости на 15

Если число делится нацело на 3 и на 5, то оно делится нацело и на 15.

делятся на 15	не делятся на 15
195, 2325, 33330	115, 708, 33033

Признак делимости на 18

Если число делится нацело на 2 и на 9, то оно делится нацело и на 18.

делятся на 18	не делятся на 18
108, 432, 9540	441, 780, 9513

Примечание:

Если числа p и q имеют общий делитель, отличный от 1, то из делимости нацело числа a на числа p и q еще не следует, что это число делится нацело на произведение pq: число 24 делится нацело на 3 и на 6, но не делится нацело на 18.

§ 4. Простые и составные числа

Определения

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Натуральное число называют **составным**, если оно имеет больше двух натуральных делителей.

простые числа	составные числа
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, …

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

Примеры

А) $10=2\cdot 5$

Б) $12=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3$

В) $30=2\cdot 3\cdot 5$

Г) $64=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6$

Д) $231=3\cdot 7\cdot 11$

Е) $300=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5=2^2\cdot 3\cdot 5^2$

Разложение на простые множители

Вариант 1

$$630=10\cdot 63=2\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 7=2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

$$630=30\cdot 21=3\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 7=2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

Вариант 2

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

§ 5. Наибольший общий делитель

Определение

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Обозначение: $НОД\,(a, b)$

$НОД\,(30, 45) - ?$

I способ

делители числа 30: $\{1, 2, \underline{3}, \underline{5}, 6, 10, \underline{15}, 30\}$

делители числа 45: $\{1, \underline{3}, \underline{5}, 9, \underline{15}, 45\}$

общие делители для 30 и 45: $\{3, 5, 15\}$

$НОД\,(30, 45) = 15$

II способ

Алгоритм:

1. Разложить числа на простые множители
2. Определить общие множители для всех чисел
3. Перемножить общие множители

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & \mathbf{3} \\ 15 & 3 \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad НОД\,(30, 45) = 3 \cdot 5 = 15$$

Для трех чисел

$НОД\,(36, 84, 120) - ?$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \mathbf{2} \\ 18 & \mathbf{2} \\ 9 & \mathbf{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & \mathbf{2} \\ 42 & \mathbf{2} \\ 21 & \mathbf{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & \mathbf{2} \\ 60 & \mathbf{2} \\ 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad НОД\,(36, 84, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Определение

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют **взаимно простыми**.

Любые два простых числа являются взаимно простыми.
Если число a – делитель числа b, то $НОД\,(a, b) = a$.

Взаимно простые числа	$НОД\,(5, 12) = 1$	$НОД\,(3, 7, 10) = 1$
Одно из чисел – делитель (для остальных)	$НОД\,(4, 8) = 4$	$НОД\,(30, 60, 90) = 30$

§ 6. Наименьшее общее кратное

Определение

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наименьшим общим кратным** этих чисел.

Обозначение: НОК (a, b)

НОК $(30, 45) - ?$

I способ

числа, кратные 30: $\{30, 60, \underline{90}, 120, 150, \underline{180}, \ldots\}$

числа, кратные 45: $\{45, \underline{90}, 135, \underline{180}, \ldots\}$

числа, кратные 30 и 45: $\{90, 180, \ldots\}$

НОК $(30, 45) = 90$

Числа, кратные первому числу, можно сразу проверять на кратность второму числу

II способ

Алгоритм:

1. Разложить числа на простые множители
2. Выписать множители, входящие в разложения одного из чисел
3. Добавить к ним недостающие множители из разложений других чисел
4. Найти произведение получившихся множителей

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array}$$

НОК $(30, 45) = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{=30} \cdot 3 = 90$

НОК $(30, 45) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 5}_{=45} \cdot 2 = 90$

Для трех чисел

НОК $(36, 84, 120) - ?$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \mathbf{2} \\ 18 & \mathbf{2} \\ 9 & \mathbf{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & \mathbf{2} \\ 42 & \mathbf{2} \\ 21 & \mathbf{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & \mathbf{2} \\ 30 & \mathbf{2} \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

НОК $(36, 84, 120) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}_{=36} \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2520$

НОК $(36, 84, 120) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}_{=120} \cdot 3 \cdot 7 = 2520$

III способ

Если числа заданы в виде степеней, то используется такой *алгоритм:*

1. Выбрать степени, основания которых встречаются только в одном из разложений данных чисел на простые множители.
2. Для каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выбрать степень с бо́льшим показателем.
3. Перемножить выбранные степени.

Полученное произведение является искомым наименьшим общим кратным.

Пример

НОК $(84, 90) - ?$

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$
$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

НОК $(84, 90) = 7^1 \cdot 5^1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 = 1260$

Для трех чисел

НОК $(18, 24, 30) - ?$

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad 18 = 2^1 \cdot 3^2$
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad 24 = 2^3 \cdot 3^1$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

НОК $(18, 24, 30) = 5^1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$

Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.
Если число b – кратное для числа a (a – делитель числа b), то НОК $(a, b) = b$.

Взаимно простые числа	НОК $(5, 12) = 5 \cdot 12 = 60$ НОК $(3, 7, 10) = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 210$
Одно из чисел – кратное (для остальных)	НОК $(4, 8) = 8$ НОК $(30, 45, 90) = 90$

Глава 2. Обыкновенные дроби

§ 7. Основное свойство дроби

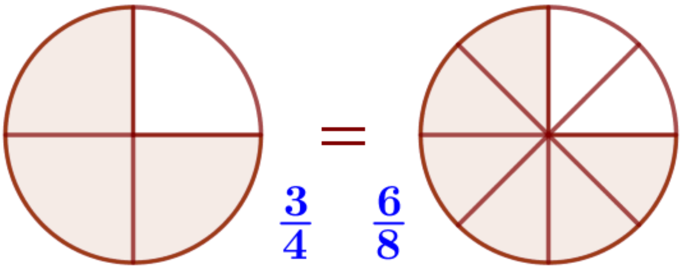
Правила

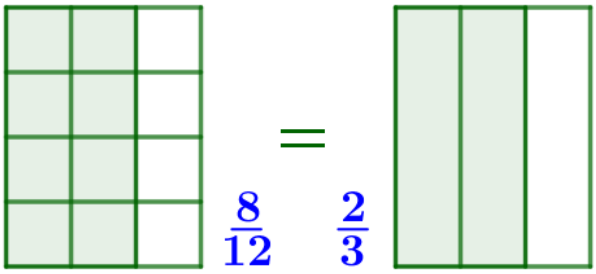
1) Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8} \qquad \frac{7}{20}=\frac{7\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{35}{100}$$

2) Если числитель и знаменатель дроби разделить на их общий делитель, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n} \qquad \frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3} \qquad \frac{19}{38}=\frac{19:19}{38:19}=\frac{1}{2}$$





Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

§ 8. Сокращение дробей

Определения

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от 1, называют **сокращением** дроби.

Дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа, называют **несократимой**. $\frac{2}{5},\ \frac{19}{44},\ \frac{73}{100}$

Если сократить дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, то получится несократимая дробь.

3 способа сокращения дробей

1) Последовательное сокращение $\frac{90}{135}=\frac{90:5}{135:5}=\frac{18}{27}=\frac{18:3}{27:3}=\frac{6}{9}=\frac{6:3}{9:3}=\frac{2}{3}$

2) Разложение на множители $\frac{90}{135}=\frac{9\cdot 10}{5\cdot 27}=\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{2}{3}$

3) Сокращение на НОД (a, b)

$$\text{НОД}(90, 135)=45 \qquad \frac{90}{135}=\frac{90:45}{135:45}=\frac{2}{3}$$

§ 9. Приведение дробей к общему знаменателю. Сравнение дробей

Дробь можно привести к любому знаменателю, кратному знаменателю дроби.

Определение

Число, на которое надо умножить знаменатель дроби, чтобы получить новый знаменатель, называют **дополнительным множителем**.

Пример

Привести дробь $\frac{5}{6}$ к знаменателю 42

$42:6=7$
дополнительный множитель – 7

$$\frac{5^{(7}}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$$

$$\frac{a^{(n}}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \qquad \frac{3^{(5}}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20} \qquad \frac{9}{50}^{(2}=\frac{9\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{18}{100}$$

Любые две дроби можно привести к одному и тому же знаменателю – **общему знаменателю**.

Определение

Общий знаменатель двух дробей – это общее кратное их знаменателей.

Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (НОЗ)

Алгоритм:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей;
2) найти дополнительные множители для каждой из дробей, разделив общий знаменатель на знаменатели данных дробей;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

Пример:

Привести $\frac{7}{8}$ и $\frac{11}{12}$ к общему знаменателю

1) найти НОК знаменателей дробей

$$\begin{array}{r|l} 8 & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{2} \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \mathbf{2} \\ 6 & \mathbf{2} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{НОК}\,(8,12)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$$

2) найти дополнительные множители для каждой из дробей

$24:8=3 \qquad 24:12=2$

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель

$$\frac{7^{(3}}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24} \qquad \frac{11^{(2}}{12}=\frac{11\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{22}{24}$$

Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример

Сравнить дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$

Приведем к общему знаменателю 15:

$$\frac{2}{3}^{(5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{10}{15};\quad \frac{3}{5}^{(3}=\frac{3\cdot3}{5\cdot3}=\frac{9}{15}$$

т.к. $\frac{10}{15}>\frac{9}{15}$, то $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$

§ 10. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Примеры

1) $\frac{3}{\underset{2\cdot4}{8}}^{(3}+\frac{1}{\underset{2\cdot3}{6}}^{(4}=\frac{3\cdot3}{8\cdot3}+\frac{1\cdot4}{6\cdot4}=\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{13}{24}$

2) $\frac{7}{\underset{4\cdot4}{16}}^{(3}-\frac{5}{\underset{4\cdot3}{12}}^{(4}=\frac{7\cdot3}{16\cdot3}-\frac{5\cdot4}{12\cdot4}=\frac{21}{48}-\frac{20}{48}=\frac{1}{48}$

Свойства сложения

1) переместительное свойство: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

2) сочетательное свойство: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right)$

3) свойства нуля: $0+a=a+0=a$

Примеры (смешанные числа)

3) $4\frac{5}{\underset{4\cdot3}{12}}+2\frac{3}{\underset{4\cdot1}{4}}^{(3}=4+\frac{5}{12}+2+\frac{3\cdot3}{3\cdot4}=6+\frac{5}{12}+\frac{9}{12}=6\frac{14}{12}=6\frac{7}{6}=6+1\frac{1}{6}=7\frac{1}{6}$

4) $1-\frac{9}{16}=\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

5) $6-3\frac{7}{11}=5\frac{11}{11}-3\frac{7}{11}=2\frac{4}{11}$

6) $5\frac{1}{\underset{3\cdot2}{6}}^{(3}-2\frac{4}{\underset{3\cdot3}{9}}^{(2}=5\frac{3}{18}-2\frac{8}{18}=4\frac{21}{18}-2\frac{8}{18}=2\frac{13}{18}$

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, необходимо «подготовить» уменьшаемое, «раздробив» одну единицу на нужное количество частей.

§ 11. Умножение дробей

$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}$ Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменений.

Пример $\frac{2}{9}\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{9}=\frac{8}{9}$ Увеличивается **количество** взятый долей

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей.

Чтобы умножить два смешанных числа, надо сначала записать их в виде неправильных дробей, а затем воспользоваться правилом умножения дробей.

Примеры

1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{32}=\frac{4\cdot 15}{9\cdot 32}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 8}=\frac{5}{24}$

2) $2\frac{3}{11}\cdot 1\frac{9}{35}=\frac{25}{11}\cdot\frac{44}{35}=\frac{25\cdot 44}{11\cdot 35}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 7}=\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$

Свойства умножения

1) переместительное свойство: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

2) сочетательное свойство: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}\right)$

3) распределительное свойство: $\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\pm\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$

4) свойства нуля: $0\cdot a=a\cdot 0=0$

5) свойство единицы: $1\cdot a=a\cdot 1=a$

Примеры

3) $\left(3-\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\right)\cdot 18=3\cdot 18-\frac{5}{6}\cdot 18+\frac{7}{9}\cdot 18=54-5\cdot 3+7\cdot 2=54-15+14=53$

4) $6\frac{1}{10}\cdot 5=\left(6+\frac{1}{10}\right)\cdot 5=6\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 5=30+\frac{1}{2}=30\frac{1}{2}$

5) $2\frac{3}{11}\cdot\frac{9}{16}+1\frac{8}{11}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{16}\cdot\left(2\frac{3}{11}+1\frac{8}{11}\right)=\frac{9}{16}\cdot 4=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

6) $\frac{1}{4}a+\frac{5}{8}a=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\cdot a=\left(\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\right)\cdot a=\frac{7}{8}a$

§ 12. Нахождение дроби от числа

Правила

1) Чтобы найти **дробь от числа**, можно число умножить на эту дробь.

$$\frac{7}{9} \text{ от } 36 \text{ составляют } 36\cdot\frac{7}{9}=\frac{36\cdot7}{1\cdot9}=\frac{4\cdot7}{1\cdot1}=28$$

$$\frac{3}{4} \text{ от } x \text{ составляют } x\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}x$$

2) Чтобы найти **проценты от числа**, можно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

$$6\% \text{ от } 15 \ (0{,}06 \text{ от } 15) \text{ составляют } 15\cdot0{,}06=0{,}9$$

$$48\% \text{ от } \frac{5}{6} \left(0{,}48 \text{ от } \frac{5}{6}\right) \text{ составляют } \frac{5}{6}\cdot0{,}48=\frac{5\cdot48}{6\cdot100}=\frac{5\cdot8}{1\cdot100}=0{,}40=0{,}4$$

$$30\% \text{ от } x \ (0{,}3 \text{ от } x) \text{ составляют } x\cdot0{,}3=0{,}3x$$

§ 13. Взаимно обратные числа

Определение

Два числа, произведение которых равно 1, называют **взаимно обратными**.

Числом, обратным 1, является само число 1.
Для числа 0 обратного числа не существует.
Если n – натуральное число, то обратное ему является число $\frac{1}{n}$.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ $\frac{4}{9}$ и $\frac{9}{4}$ 2,5 и 0,4 3 и $\frac{1}{3}$ $7\frac{2}{9}$ и $\frac{9}{65}$

§ 14. Деление дробей

Правило

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Свойства

$1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ $0:\frac{a}{b}=0$ На 0 делить нельзя

Примеры

1) $$\frac{6}{35}:\frac{2}{5}=\frac{6}{35}\cdot\frac{5}{2}=\frac{\overset{3}{6}\cdot\overset{1}{5}}{\underset{7}{35}\cdot\underset{1}{2}}=\frac{3}{7}$$

2) $$10:\frac{6}{7}=\frac{10}{1}:\frac{6}{7}=\frac{10}{1}\cdot\frac{7}{6}=\frac{\overset{5}{10}\cdot 7}{1\cdot\underset{3}{6}}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$$

3) $$3\frac{3}{5}:4=\frac{18}{5}:\frac{4}{1}=\frac{18}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\overset{9}{18}\cdot 1}{5\cdot\underset{2}{4}}=\frac{9}{10}$$

4) $$1\frac{7}{8}:1\frac{9}{16}=\frac{15}{8}:\frac{25}{16}=\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{25}=\frac{\overset{3}{15}\cdot\overset{2}{16}}{\underset{1}{8}\cdot\underset{5}{25}}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

§ 15. Нахождение числа по заданному значению его дроби

Правила

1) Чтобы найти **число по заданному значению его дроби**, можно данное значение разделить на эту дробь.

$$\frac{7}{9}\text{ от } x \text{ составляют } 28 \Rightarrow \frac{7}{9}x=28$$

$$x=28:\frac{7}{9}=\frac{28}{1}\cdot\frac{9}{7}=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{1}=36$$

2) Чтобы найти **число по его процентам**, можно представить проценты в виде дроби и разделить значение процентов на эту дробь.

$$70\%\text{ от } x \text{ составляют } 84\,(0{,}7\text{ от } x \text{ составляют } 84) \Rightarrow 0{,}7x=84$$

$$x=84:0{,}7=840:7=120$$

§ 16. Преобразование обыкновенной дроби в десятичную

Правила

1) Чтобы несократимую дробь $\frac{a}{b}$ преобразовать в десятичную, необходимо привести её к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д.

Примеры

1) $\frac{7}{10}=0{,}7$

2) $\frac{23}{100}=0{,}23$

3) $\frac{19}{1000}=0{,}019$

4) $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}=0{,}5$

5) $\frac{23}{50}=\frac{23\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{46}{100}=0{,}46$

6) $\frac{3}{40}=\frac{3}{4\cdot 10}=\frac{3\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{75}{1000}=0{,}075$

2) Несократимую дробь $\frac{a}{b}$ можно преобразовать в десятичную дробь только тогда, когда разложение знаменателя b на простые множители не содержит чисел, отличных от 2 и 5.

2, 4, 5, 8, 16, 20, 25, 40, 50 и др.

3) Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, можно её числитель разделить на знаменатель.

Примеры

7) $\frac{1}{5}=1:5=0{,}2$

$$\begin{array}{r|l} -1{,}0 & \underline{\;5\;} \\ \underline{1\,0} & 0{,}2 \\ 0 & \end{array}$$

8) $\frac{19}{4}=19:4=4{,}75$

$$\begin{array}{r|l} -19{,}0 & \underline{\;4\;} \\ \underline{16} & 4{,}75 \\ -30 & \\ \underline{28} & \\ -20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

9) $\frac{13}{25}=13:25=0{,}52$

$$\begin{array}{r|l} -13{,}0 & \underline{\;25\;} \\ \underline{12\,5} & 0{,}52 \\ -50 & \\ \underline{50} & \\ 0 & \end{array}$$

§ 17. Бесконечные периодические дроби

Определения

1) Дроби, в записи которых после запятой стоит конечное число цифр, называют **конечными десятичными дробями**. (§ 16)

2) Если дробь $\frac{a}{b}$ несократима и ее знаменатель b в разложении на простые множители содержит не только 2 и 5 $\left(\text{например } \frac{7}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{9}\right)$, то она представляется в виде **бесконечной периодической десятичной дроби**.

Примеры:

Обыкновенная дробь	Периодическая дробь	Краткая запись (период дроби) *прочтение*
$\frac{1}{9}$	0,111111...	0,(1) *Нуль целых один в периоде*
$\frac{5}{11}$	0,454545...	0,(45) *Нуль целых сорок пять в периоде*
$\frac{7}{12}$	0,583333...	0,58(3) *Нуль целых пятьдесят восемь сотых и три в периоде*

Правило

При делении натурального числа на натуральное число можно получить один из трёх результатов: натуральное число, конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь.

Примеры:

12:3=4 12:5=2,4 12:11=1,(09)

§ 18. Десятичное приближение обыкновенных дробей

Правило

Чтобы найти десятичное приближение обыкновенной дроби до нужного разряда, надо:

1) выполнить деление до следующего разряда;

2) полученную конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь округлить до нужного разряда.

Примеры:

Дробь	**Приближение**		
	до десятых	*до сотых*	*до тысячных*
$\frac{26}{45}$	$\frac{26}{45}=0{,}57\ldots\approx 0{,}6$	$\frac{26}{45}=0{,}577\ldots\approx 0{,}58$	$\frac{26}{45}=0{,}5777\ldots\approx 0{,}578$
$8\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}=8{,}33\ldots\approx 8{,}3$	$8\frac{1}{3}=8{,}333\ldots\approx 8{,}33$	$8\frac{1}{3}=8{,}3333\ldots\approx 8{,}333$

Глава 3. Отношения и пропорции

§ 19. Отношения

Определение

$\frac{a}{b}$ или $a:b$

a – предыдущий член
b – последующий член

Частное двух чисел a и b, отличных от нуля, называют **отношением** чисел a и b, или отношением числа a к числу b.

Основное свойство отношения

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

$$3:6=6:12=2:4=0{,}2:0{,}4=30:60=\ldots$$

Следствие: Отношение дробных чисел можно заменить отношением натуральных чисел.

$$\frac{2}{3}:\frac{7}{9}=\left(\frac{2}{3}\cdot 9\right):\left(\frac{7}{9}\cdot 9\right)=6:7 \qquad 1\frac{1}{2}:0{,}25=\left(1\frac{1}{2}\cdot 4\right):(0{,}25\cdot 4)=6:1$$

Отношение чисел a и b показывает, во сколько раз число a больше числа b или какую часть число a составляет от числа b.

Пример:

Стороны прямоугольника равны 2 см и 5 см. Найдем отношение длин его сторон.

Отношение большей стороны к меньшей:

$\frac{\textbf{Б}}{\textbf{М}}=\frac{5}{2}=2{,}5\Rightarrow$ длина одной сторона в 2,5 раза больше длины другой.

Отношение меньшей стороны к большей:

$\frac{\textbf{М}}{\textbf{Б}}=\frac{2}{5}\Rightarrow$ длина меньшей стороны составляет $\frac{2}{5}$ от длины большей стороны.

Отношение величин

Если значение двух величин выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют также отношением этих величин (отношением длин, отношением масс, отношением площадей и т.д.)

Если значения величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо сначала перейти к одной единице измерения.

$$36\text{ кг}:9{,}6\text{ ц}=36\text{ кг}:960\text{ кг}=\frac{36}{960}=\frac{3}{80}=3:80$$

Определение

Масштаб – отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности

1:5 000 000 1 см на карте соответствует 5 000 000 см на местности, то есть 50 км

Отношение разноименных величин – это новая величина с новыми единицами измерения.

Примеры:

- *скорость* – отношение длины пройденного пути ко времени, за которое пройден этот путь;
- *цена* – отношение стоимости товара к количеству единиц его измерения (килограммов, литров, метров, коробок и др.);
- *плотность* – отношение массы вещества к его объёму;
- *производительность труда* – отношение объёма выполненной работы ко времени, за которое выполняется эта работа

§ 20. Пропорции

Определение

средние

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $\underset{\uparrow}{a}:\overset{\downarrow}{b}=\overset{\downarrow}{c}:\underset{\uparrow}{d}$

крайние

Равенство двух отношений называют **пропорцией**. Числа a *и* d называют **крайними членами** пропорции, а числа b и c – **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Примеры:

$$\frac{1{,}5}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 1{,}5\cdot 4=2\cdot 3$$
$$6=6$$

$$0{,}25:\frac{50}{7}=1{,}4:40\Rightarrow 0{,}25\cdot 40=\frac{50}{7}\cdot 1{,}4$$
$$10=10$$

Следствие: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$, $d=\frac{bc}{a}$

Примеры:

$$\frac{9}{x}=\frac{3}{7}$$
$$x=\frac{9\cdot 7}{3}=21$$

$$\frac{x}{3{,}2}=\frac{630}{4{,}2}$$
$$x=\frac{3{,}2\cdot 630}{4{,}2}=\frac{3{,}2\cdot 30}{0{,}2}=480$$

$$\frac{25}{100}=\frac{x}{78}$$
$$x=\frac{25\cdot 78}{100}=\frac{1\cdot 78}{4}=19{,}5$$

если $ad=bc$, то
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ и $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

Если a, b, c и d – числа, отличные от нуля, и $ad=bc$, то отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны и могут образовать пропорцию $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Пример:

$$4\cdot 21=7\cdot 12 \Rightarrow \frac{4}{7}=\frac{12}{21},\ \frac{21}{12}=\frac{7}{4},\ \frac{4}{12}=\frac{7}{21},\ \frac{21}{7}=\frac{12}{4}$$

§ 21. Процентное отношение двух чисел

Определение

$\frac{a}{b}\cdot 100$ **Процентное отношение** двух чисел – это их отношение, выраженное в процентах.

Процентное отношение показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.
Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

Примеры:

1) В парке растет 400 деревьев, из них 96 – ели. Сколько процентов всех деревьев составляют ели?

Найдем процентное отношение количества елей к количеству всех деревьев: $\frac{96}{400}\cdot 100=24(\%)\Rightarrow$ ели составляют 24% от всех деревьев.

2) Стоимость товара возросла со 150 р. до 240 р. На сколько увеличилась стоимость товара?

Найдем процентное отношение новой стоимость к начальной стоимости: $\frac{240}{150}\cdot 100=160(\%)\Rightarrow$ новая стоимость составляет 160% относительно начальной. Было 100%, стало 160%, получаем, что стоимость увеличилась на 60% $(160\%-100\%=60\%)$.

§ 22. Прямая и обратная пропорциональная зависимости

Определение

Две переменные величины называют **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

$$\frac{y}{x}=k \Rightarrow y=kx$$

Если две переменные величины прямо пропорциональны, то отношение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же, постоянному для данных величин, числу.

Примеры:

1) сторона и периметр квадрата

a – сторона, см	1	3	4,5	↑
P – периметр, см	1+1+1+1=4	3+3+3+3=12	4,5+4,5+4,5+4,5=18	↑

$$\frac{P}{a}=\frac{4}{1}=\frac{12}{3}=\frac{18}{4,5}=4 \Rightarrow P=4a \text{ (прямая пропорциональность)}$$

2) время и путь

Пусть скорость движения туриста будет равна 5 км/ч.

$\mathcal{V}$ – скорость туриста, км/ч	5	5	5	
t – время движения, ч	1	1,5	2	↑
S – путь, пройденный за время t, км	5	5+2,5=7,5	5+5=10	↑

$$\frac{S}{t}=\frac{5}{1}=\frac{7,5}{1,5}=\frac{10}{2}=5 \Rightarrow S=5t \text{ (прямая пропорциональность)}$$

Определение

Две переменные величины называют **обратно пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из этих величин в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

$$xy=k \Rightarrow y=\frac{k}{x}$$

Если две переменные величины обратно пропорциональны, то произведение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же для данных величин числу.

Примеры:

3) скорость и время

Пусть путь будет равен 12 км.

S – путь из одного села в другое, км	12	12	12	12	
$\mathcal{V}$ – скорость велосипедиста, км/ч	4	6	8	12	↑
t – время движения, ч	3	2	1,5	1	↓

$$\mathcal{V}t=4\cdot3=6\cdot2=8\cdot1{,}5=12\cdot1=12 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{V}t=12 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{12}{\mathcal{V}}$$

(обратная пропорциональность)

4) стороны прямоугольника

Пусть площадь прямоугольника равна 24 см^2.

S, см^2	24	24	24	24	24	24	24	
a, см	1	2	3	4	5	6	8	↑
b, см	24	12	8	6	4,8	4	3	↓

$$ab=1\cdot24=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6=5\cdot4{,}8=6\cdot4=8\cdot3=24 \quad\Rightarrow\quad ab=24 \quad\Rightarrow\quad b=\frac{24}{a}$$

(обратная пропорциональность)