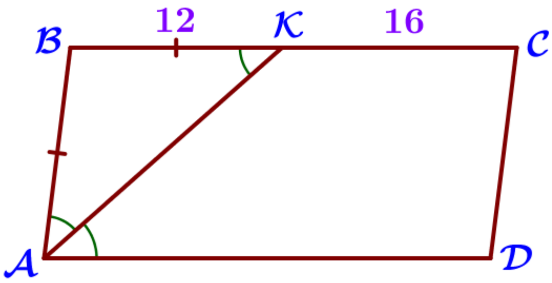
23. Геометрическая задача на вычисление
Блок 1. ФИПИ ПРИМЕРЫ

1. Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если BK = 12, CK = 16.



Дано:
ABCD – параллелограмм,
AK – биссектриса, $AK \cap BC = K$,
BK = 12, CK = 16.

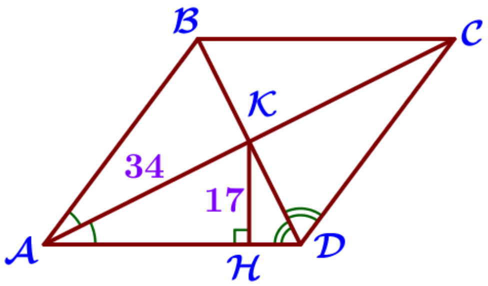
Найти: P_{ABCD}.

Решение:

1. Так как AK – биссектриса, то $\angle BAK = \angle DAK$.
2. Так как ABCD – параллелограмм, то $AD \parallel BC$.
3. $AD \parallel BC$, AK – секущая, тогда $\angle BKA = \angle DAK$ по свойству накрест лежащих углов.
4. $\angle BAK = \angle DAK$ (п. 1), $\angle BKA = \angle DAK$ (п. 3), следовательно, $\angle BAK = \angle BKA$. Значит, $\triangle ABK$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, AK – основание, а $AB = BK = 12$.
5. $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + BK + KC) = 2(12 + 12 + 16) = 80$.

Ответ: $P_{ABCD} = 80$.

2.1. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



Дано:
ABCD – ромб, $AC \cap BD = K$, $AC = 68$,
KH – расстояние от точки K до AD,
$KH = 17$.

Найти: углы ромба.

Решение:

1. Так как ABCD – ромб и, следовательно, параллелограмм, то по свойствам параллелограмма: $AK = KC = AC : 2 = 68 : 2 = 34$ $(AC \cap BD = K)$, $\angle C = \angle A$ и $\angle D = \angle B$.
2. Так как KH – расстояние от точки K до AD, то $KH \perp AD$, а $\angle AHK = 90^\circ$.
3. Рассмотрим $\triangle AKH$:
$\angle AHK = 90^\circ$ (п. 2), тогда $\triangle AKH$ – прямоугольный; $KH = 17$ (по условию), $AK = 34$ (п.1), следовательно, $\sin\angle KAH = \frac{KH}{AK} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$, то есть $\angle KAH = 30^\circ$.

4. Так как ABCD – ромб, то $AC \perp BD$, следовательно, $\angle AKD = 90°$.

5. Рассмотрим $\triangle AKD$:

$\angle AKD = 90°$ (п.4), $\angle KAD = 30°$ (п.3), тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle ADK$:

$$\angle AKD + \angle ADK + \angle KAD = 180°,$$
$$\angle ADK = 180° - \angle AKD - \angle KAD,$$
$$\angle ADK = 180° - 90° - 30°,$$
$$\angle ADK = 60°.$$

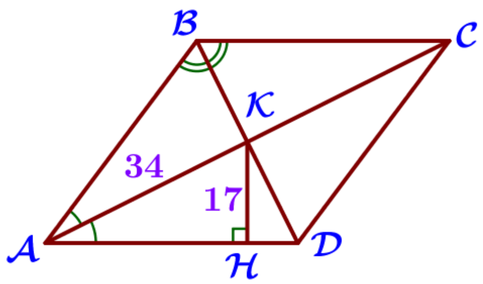
6. ABCD – ромб, AC и BD – диагонали, тогда по свойству диагоналей ромба:

AC – биссектриса угла $\angle BAD$, следовательно, $\angle BAD = 2\angle KAH = 60°$; а BD – биссектриса угла $\angle ADC$, следовательно, $\angle ADC = 2\angle ADK = 120°$.

7. $\angle C = \angle A = 60°$, $\angle D = \angle B = 120°$.

Ответ: 60°; 120°; 60°; 120°.

2.2. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.



Дано:
ABCD – ромб, $AC \cap BD = K$, $AC = 68$, $KH \perp AD$, $H \in AD$, $KH = 17$.

Найти: углы ромба.

Решение:

1. Так как ABCD – ромб, $AC \cap BD = K$, то по свойствам ромба:
$AK = KC = AC:2 = 68:2 = 34$, $AD \parallel BC$, $\angle C = \angle A$ и $\angle D = \angle B$.

2. Рассмотрим $\triangle AKH$:

$\angle H = 90°$ (т.к. $KH \perp AD$), тогда $\triangle AKH$ – прямоугольный; катет $KH = 17$ (по условию), гипотенуза $AK = 34$ (п.1), $KH = \frac{1}{2}AK$, следовательно, $\angle KAH = 30°$.

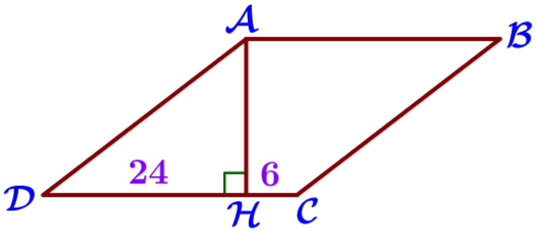
3. Так как ABCD – ромб и AC – диагональ, то $\angle BAD = 2\angle KAH = 60°$ по свойству диагоналей ромба.

4. Так как $AD \parallel BC$, AB – секущая, то $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и по свойству односторонних углов $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 180° - 60° = 120°$.

5. $\angle C = \angle A = 60°$, $\angle D = \angle B = 120°$.

Ответ: 60°; 120°; 60°; 120°.

3. Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=24 и CH=6. Найдите высоту ромба.



Дано:
ABCD – ромб, AH – высота,
DH=24, CH=6.

Найти: AH.

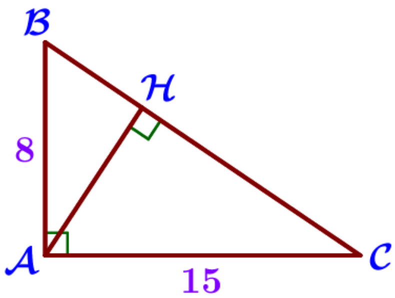
Решение:
1. Так как ABCD – ромб, то все его стороны равны, тогда $AD=DC=DH+HC=24+6=30$.

2. Рассмотрим $\triangle ADH$: $\angle H=90°$ (т.к. AH – высота), следовательно, $\triangle ADH$ – прямоугольный; $DH=24$ (по условию), $AD=30$ (п.1), AH найдем по т. Пифагора:

$$AD^2=AH^2+DH^2, \qquad AH^2=30^2-24^2,$$
$$AH^2=AD^2-DH^2, \qquad AH^2=324,$$
$$AH=18.$$

Ответ: AH=18.

4.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle A=90°$, $AC=15$, $AB=8$,
AH – высота.

Найти: AH.

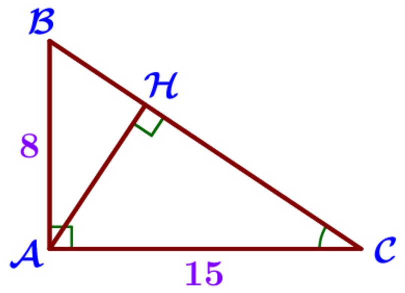
Решение:
1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A=90°$, $AC=15$, $AB=8$, тогда по теореме Пифагора найдем гипотенузу BC:

$$BC^2=AB^2+AC^2,$$
$$BC^2=8^2+15^2,$$
$$BC^2=289,$$
$$BC=17.$$

2. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC$ и $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC$, тогда $\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}AH\cdot BC$, то есть $AB\cdot AC=AH\cdot BC$, а $AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{8\cdot 15}{17}=\frac{120}{17}=7\frac{1}{17}$.

Ответ: $AH=7\frac{1}{17}$.

4.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:
$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle A = 90°$, $AC = 15$, $AB = 8$, AH – высота.

Найти: AH.

Решение:
1. По условию $\triangle ABC$ – прямоугольный, $AC = 15$, $AB = 8$, тогда по теореме Пифагора найдем гипотенузу BC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$
$$BC^2 = 8^2 + 15^2,$$
$$BC^2 = 289,$$
$$BC = 17.$$

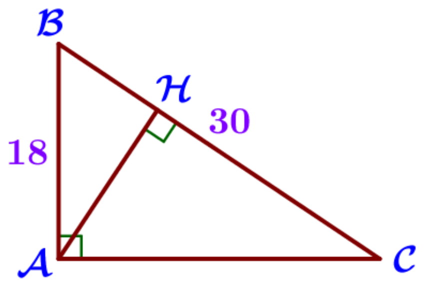
2. $\angle AHC = 90°$ (т. к. AH – высота), $\angle BAC = 90°$ (по условию), то есть $\angle AHC = \angle BAC$.

3. Рассмотрим треугольники ABC и HAC:

$\angle AHC = \angle BAC$ (п. 2), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ по двум углам, тогда $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{BC}$, откуда $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{8 \cdot 15}{17} = \dfrac{120}{17} = 7\dfrac{1}{17}$.

Ответ: $AH = 7\dfrac{1}{17}$.

5.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $AB = 18$, $BC = 30$, AH – высота.

Найти: AH.

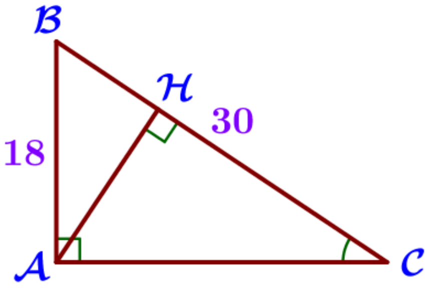
Решение:
1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A = 90°$, $AB = 18$, $BC = 30$, тогда по теореме Пифагора найдем катет AC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \qquad AC^2 = 30^2 - 18^2,$$
$$AC^2 = BC^2 - AB^2, \qquad AC^2 = 576,$$
$$AC = 24.$$

2. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC$, следовательно, $AB\cdot AC=AH\cdot BC$, откуда $AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{18\cdot 24}{30}=14,4$.

Ответ: $AH=14,4$.

5.2. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle A=90°$, $AB=18$, $BC=30$, AH – высота.

Найти: AH.

Решение:
1. По условию $\triangle ABC$ – прямоугольный, $AB=18$, $BC=30$, тогда по теореме Пифагора найдем катет AC:

$$BC^2=AB^2+AC^2, \quad AC^2=30^2-18^2,$$
$$AC^2=BC^2-AB^2, \quad AC^2=576,$$
$$AC=24.$$

2. Рассмотрим $\triangle AHC$: $\angle AHC=90°$ (т. к. AH – высота), тогда $\sin\angle C=\frac{AH}{AC}$.

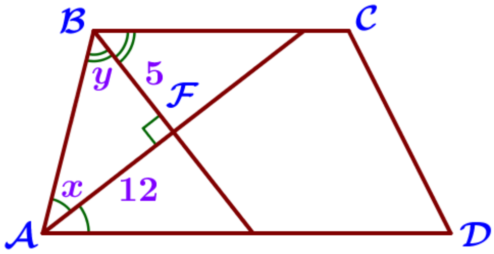
3. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A=90°$ (по условию), тогда $\sin\angle C=\frac{AB}{BC}$.

4. $\sin\angle C=\frac{AH}{AC}$ и $\sin\angle C=\frac{AB}{BC}$, следовательно $\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}$, то есть

$$AH=\frac{AC\cdot AB}{BC}=\frac{24\cdot 18}{30}=14,4.$$

Ответ: $AH=14,4$.

6.1. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF=12$, $BF=5$.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD\parallel BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF=12$, $BF=5$.

Найти: AB.

Решение:
1. Пусть $x=\angle BAF$, $y=\angle ABF$.

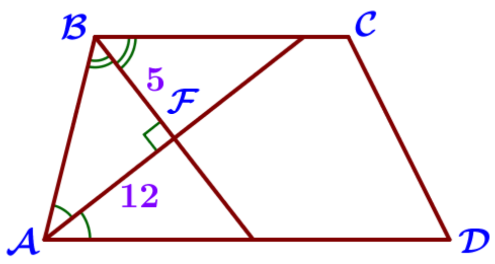
2. Так как AF – биссектриса $\angle A$ и $x=\angle BAF$, то $\angle BAD=2x$.

3. Так как BF – биссектриса $\angle B$ и $y = \angle ABF$, то $\angle ABC = 2y$.
4. $AD \| BC$, AB – секущая, тогда $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, то есть $2x + 2y = 180°$, а $x + y = 90°$.
5. Рассмотрим $\triangle ABF$: по теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle F = 180°$, то есть $\angle F = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (x + y) = 90°$, следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный, AB можно найти по т. Пифагора:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2, \qquad AB^2 = 169,$$
$$AB^2 = 12^2 + 5^2, \qquad AB = 13.$$

Ответ: $AB = 13$.

6.2. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 12, BF = 5.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD \| BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF = 12$, $BF = 5$.

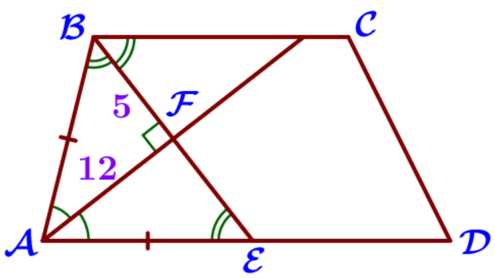
Найти: AB.

Решение:
1. Так как AF – биссектриса $\angle A$, то $\angle BAD = 2\angle BAF$.
2. Так как BF – биссектриса $\angle B$, то $\angle ABC = 2\angle ABF$.
3. $AD \| BC$, AB – секущая, тогда $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние и $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, следовательно $2\angle BAF + 2\angle ABF = 180°$, а $\angle BAF + \angle ABF = 90°$.
4. Рассмотрим $\triangle ABF$: $\angle BAF + \angle ABF = 90°$, следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный по признаку прямоугольного треугольника, тогда AB можно найти по т. Пифагора:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2, \qquad AB^2 = 169,$$
$$AB^2 = 12^2 + 5^2, \qquad AB = 13.$$

Ответ: $AB = 13$.

6.3. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF = 12, BF = 5.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD \| BC$, AF – биссектриса $\angle A$, BF – биссектриса $\angle B$, $AF = 12$, $BF = 5$.

Найти: AB.

Решение:

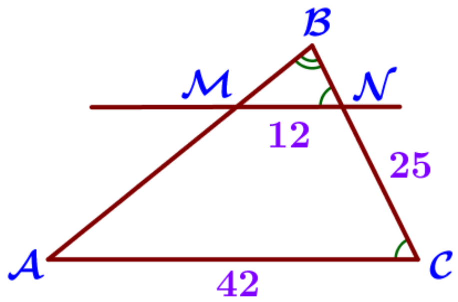
1. Пусть $BF \cap AD = E$.
2. $AD \parallel BC$, BE – секущая, тогда $\angle AEB = \angle CBE$ по свойству накрест лежащих углов.
3. Так как BF – биссектриса $\angle B$, то $\angle AEB = \angle CBE$.
4. $\angle AEB = \angle CBE$, $\angle ABE = \angle CBE$, следовательно, $\angle AEB = \angle ABE$, а $\triangle ABE$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, то есть $AB = AE$, BE – основание.
5. $\triangle ABE$ – равнобедренный AF – биссектриса $\angle A$, проведенная к основанию BE, следовательно, AF – высота и $AF \perp BE$.
6. Рассмотрим $\triangle ABF$:

$\angle F = 90^\circ$ $(AF \perp BE)$, следовательно, $\triangle ABF$ – прямоугольный и AB можно найти по т. Пифагора:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2, \qquad AB^2 = 169,$$
$$AB^2 = 12^2 + 5^2, \qquad AB = 13.$$

Ответ: $AB = 13$.

7.1. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.



Дано:
$\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN \cap AB = M$, $MN \cap BC = N$, $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

Найти: BN.

Решение:

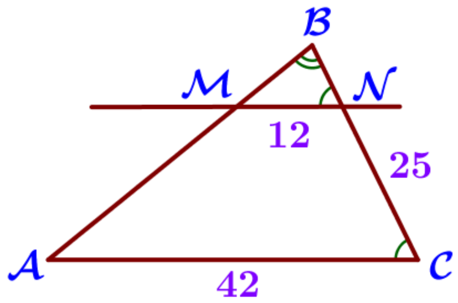
1. По условию $MN \parallel AC$, BC – секущая, тогда $\angle BCA = \angle BNM$ по свойству соответсвенных углов.
2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle BNM = \angle BCA$ (п. 1), $\angle B$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам, тогда $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BN}{BC}$.
3. Пусть $BN = x$, по условию: $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$, тогда равенство $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BN}{BC}$ принимает вид $\dfrac{12}{42} = \dfrac{x}{x+25}$, найдем x:

$$42x = 12(x+25), \quad |:6 \qquad 7x - 2x = 50,$$
$$7x = 2(x+25), \qquad 5x = 50,$$
$$7x = 2x + 50, \qquad x = 10.$$

4. $BN = x = 10$.

Ответ: $BN = 10$.

7.2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN = 12, AC = 42, NC = 25.



Дано:
$\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $MN \cap AB = M$, $MN \cap BC = N$, $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.

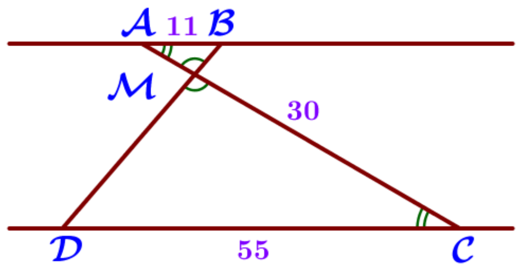
Найти: BN.

Решение:
1. По условию $MN \parallel AC$, BC – секущая, тогда $\angle BCA = \angle BNM$ по свойству соответсвенных углов.
2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle BNM = \angle BCA$ (п. 1), $\angle B$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ по двум углам, тогда $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$.
3. $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$, $BC = BN + NC = BN + 25$, тогда равенство $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ принимает вид $\frac{12}{42} = \frac{BN}{BN+25}$, найдем BN:

$$42BN = 12(BN+25), \quad |:6$$
$$7BN = 2(BN+25),$$
$$7BN = 2BN + 50,$$
$$7BN - 2BN = 50,$$
$$5BN = 50,$$
$$BN = 10.$$

Ответ: $BN = 10$.

8.1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB = 11, CD = 55, AC = 30.



Дано:
$AB \parallel DC$, $AC \cap BD = M$,
$AB = 11$, $CD = 55$, $AC = 30$.

Найти: MC.

Решение:
1. По условию $AB \parallel DC$, AC – секущая, тогда $\angle BAC = \angle DCA$ по свойству накрест лежащих углов.
2. Рассмотрим треугольники ABM и CDM:
$\angle BAC = \angle DCA$ (п. 1), $\angle AMB = \angle CMD$ (свойство вертикальных углов), следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ по двум углам, тогда $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$.

3. Пусть $AM = x$, тогда $MC = 5x$, так как $AM:MC = 1:5$.

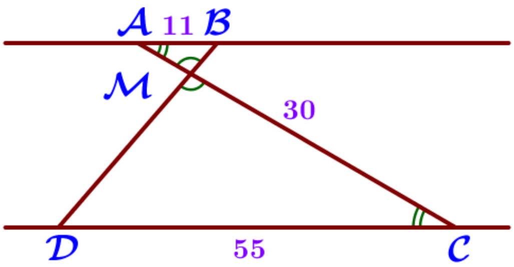
4. $AM + MC = AC = 30$, составим и решим уравнение:

$$x + 5x = 30, \quad 6x = 30, \quad x = 5.$$

5. $MC = 5x = 5 \cdot 5 = 25$.

Ответ: $MC = 25$.

8.2. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB = 11, CD = 55, AC = 30.



Дано:
$AB \parallel DC$, $AC \cap BD = M$,
AB = 11, CD = 55, AC = 30.

Найти: MC.

Решение:

1. Рассмотрим треугольники ABM и CDM:
$\angle BAC = \angle DCA$ (накрест лежащие углы при $AB \parallel DC$ и секущей AC),
$\angle AMB = \angle CMD$ (вертикальные углы), следовательно, $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ по двум углам, тогда $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{DC}$.

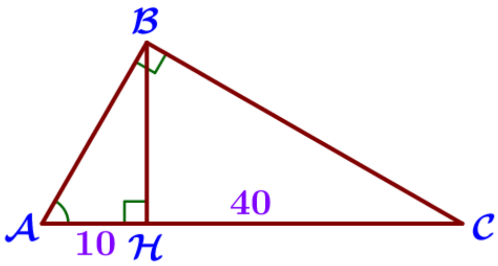
2. Пусть $MC = x$, тогда $AM = AC - MC = 30 - x$, следовательно, равенство $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{DC}$ принимает вид $\dfrac{30 - x}{x} = \dfrac{11}{55}$, найдем x:

$$11x = 55(30 - x), \quad |:11 \qquad x + 5x = 150,$$
$$x = 5(30 - x), \qquad 6x = 150,$$
$$x = 150 - 5x, \qquad x = 25.$$

3. $MC = x = 25$.

Ответ: $MC = 25$.

9.1. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH = 10, AC = 40.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle B = 90°$, BH – высота, $AH = 10$, $AC = 40$.

Найти: AB.

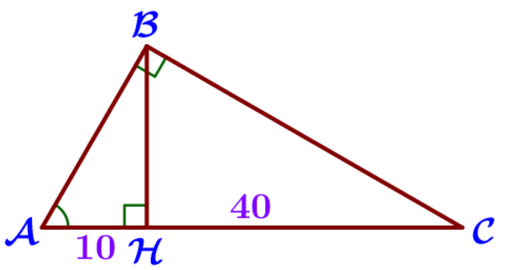
Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 90°$ (по условию), тогда $\cos\angle A = \frac{AB}{AC}$.
2. Рассмотрим $\triangle AHB$: $\angle AHB = 90°$ (т. к. BH – высота), тогда $\cos\angle A = \frac{AH}{AB}$.
3. $\cos\angle A = \frac{AB}{AC}$ (п. 1), $\cos\angle A = \frac{AH}{AB}$ (п. 2), следовательно,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}, \qquad AB^2 = 40 \cdot 10,$$
$$AB^2 = AC \cdot AH, \qquad AB = 20.$$

Ответ: $AB = 20$.

9.2. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 10$, $AC = 40$.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle B = 90°$, BH – высота, $AH = 10$, $AC = 40$.

Найти: AB.

Решение:

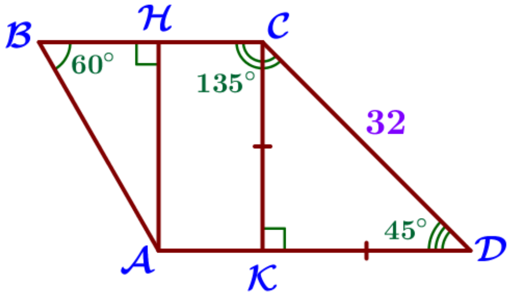
1. Так как BH – высота, то $\angle AHB = 90°$.
2. Рассмотрим треугольники ABH и ACB:

$\angle AHB = \angle ABC$ ($\angle AHB = 90°, \angle ABC = 90°$), $\angle A$ – общий, следовательно, $\triangle ABH \sim \triangle ACB$ по двум углам, тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, следовательно,

$$AB^2 = AC \cdot AH, \qquad AB^2 = 400,$$
$$AB^2 = 40 \cdot 10, \qquad AB = 20.$$

Ответ: $AB = 20$.

10.1. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD = 32$.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 135°$, $CD = 32$.

Найти: AB.

Решение:

1. Проведем высоты AH и CK трапеции ABCD ($CK \perp AD$, $CK \perp BC$, $AH \perp BC$, $AH = CK$ – расстояние между $AD \parallel BC$).

2. По условию $AD \parallel BC$, CD – секущая, тогда $\angle BCD$ и $\angle ADC$ – односторонние и $\angle BCD + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ADC = 180° - \angle BCD = 180° - 135° = 45°$.

3. $\angle BCD = 135°$ (по условию), $\angle BCK = 90°$ (CK – высота, $CK \perp BC$), тогда $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 135° - 90° = 45°$.

4. Рассмотрим $\triangle CKD$:

$\angle K = 90°$ (т.к. CK – высота, $CK \perp AD$), следовательно, $\triangle CKD$ – прямоугольный; $\angle D = 45°$ (п. 2), $\angle C = 45°$ (п. 3), т.е. $\angle D = \angle C$, тогда $\triangle CKD$ – равнобедренный по определению; зная, что $CD = 32$, найдем катет CK по т. Пифагора:

$$CK^2 + KD^2 = CD^2,\ CK^2 + CK^2 = 32^2,\ 2CK^2 = 32^2,\ CK^2 = 32 \cdot 16,\ CK = 16\sqrt{2}.$$

5. Рассмотрим $\triangle ABH$:
$\angle H = 90°$ (т.к. AH – высота, $AH \perp BC$), следовательно, $\triangle ABH$ – прямоугольный; $\angle B = 60°$ (по условию), найдем $\angle A$ по теореме о сумме углов треугольника:

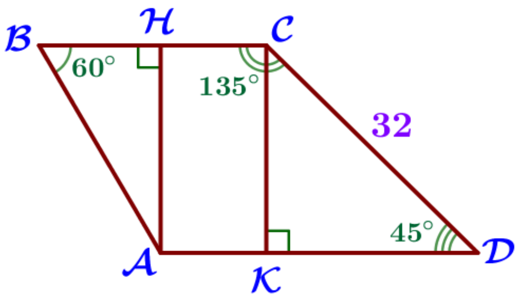
$$\angle A + \angle B + \angle H = 180°, \qquad \angle A = 180° - 60° - 90°,$$
$$\angle A = 180° - \angle B - \angle H, \qquad \angle A = 30°;$$

Следовательно, по теореме о катете, лежащем против угла в 30°
$BH = \frac{1}{2}AB$; зная, что $AH = CK = 16\sqrt{2}$ (п. 1 и 4), найдем гипотенузу AB по т. Пифагора:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2,$$
$$AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AH^2,$$
$$AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = (16\sqrt{2})^2,$$
$$\frac{3}{4}AB^2 = 16^2 \cdot 2,$$
$$AB^2 = \frac{16^2 \cdot 2 \cdot 4}{3},$$
$$AB = \frac{16 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}},$$
$$AB = \frac{32 \cdot \sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $AB = \dfrac{32\sqrt{6}}{3}$.

10.2. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD = 32$.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 135°$, $CD = 32$.

Найти: AB.

Решение:

1. По условию $AD \| BC$, CD – секущая, тогда $\angle BCD$ и $\angle ADC$ – односторонние и $\angle BCD + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ADC = 180° - \angle BCD = 180° - 135° = 45°$.

2. Проведем высоты AH и CK трапеции ABCD ($CK \perp AD$, $AH \perp BC$, $AH = CK$ – расстояние между $AD \| BC$).

3. Рассмотрим $\triangle CKD$:

$\angle K = 90°$ (т.к. CK – высота, $CK \perp AD$), $\angle D = 45°$ (п. 1), $CD = 32$ (по условию), тогда $\frac{CK}{CD} = \sin\angle D$, то есть

$$CK = CD \cdot \sin\angle D = 32 \cdot \sin 45° = 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}.$$

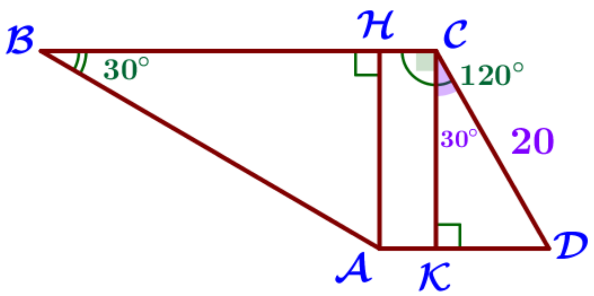
3. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$\angle H = 90°$ (т.к. AH – высота, $AH \perp BC$), $\angle B = 60°$ (по условию), $AH = CK = 16\sqrt{2}$ (п. 2-3), тогда $\frac{AH}{AB} = \sin\angle B$, то есть

$$AB = AH : \sin\angle B = 16\sqrt{2} : \sin 60° = 16\sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $AB = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

11. Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 120°, а $CD = 20$.



Дано:
ABCD – трапеция, $AD \| BC$, $\angle ABC = 30°$, $\angle BCD = 120°$, $CD = 20$.

Найти: AB.

Решение:

1. Проведем высоты AH и CK трапеции ABCD ($CK \perp AD$, $CK \perp BC$, $AH \perp BC$, $AH = CK$ – расстояние между $AD \| BC$).

2. $\angle BCD = 120°$ (по условию), $\angle BCK = 90°$ (CK – высота, $CK \perp BC$), тогда $\angle KCD = \angle BCD - \angle BCK = 120° - 90° = 30°$.

3. Рассмотрим $\triangle KCD$:

$\angle K = 90°$ (CK – высота, $CK \perp AD$), тогда $\triangle KCD$ – прямоугольный; гипотенуза $CD = 20$ (по условию), $\angle KCD = 30°$ (п. 2), следовательно, тогда по теореме о катете, лежащем против угла в 30°, катет $KD = CD : 2 = 20 : 2 = 10$; по т. Пифагора найдем катет CK:

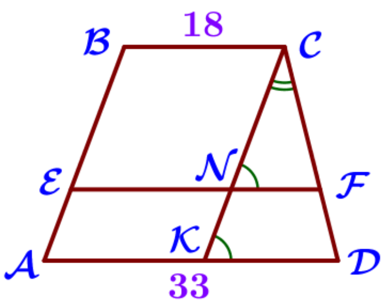
$$CK^2 + KD^2 = CD^2,\ CK^2 = CD^2 - KD^2,\ CK^2 = 20^2 - 10^2,\ CK^2 = 300,\ CK = 10\sqrt{3}.$$

4. Рассмотрим $\triangle ABH$:
$\angle H = 90°$ (AH – высота, $AH \perp BC$,), т.е. $\triangle ABH$ – прямоугольный; $\angle B = 30°$ (по условию), катет $AH = CK = 10\sqrt{3}$ (п. 1 и 3), тогда по теореме о катете, лежащем против угла в 30°, $AH = \frac{1}{2}AB$, следовательно, гипотенуза

$$AB = AH \cdot 2 = 10\sqrt{3} \cdot 2 = 20\sqrt{3}.$$

Ответ: $AB = 20\sqrt{3}$.

12.1. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.



Дано:
$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$, $EF \cap AB = E$, $EF \cap CD = F$, $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.

Найти: EF.

Решение:

1. Проведем отрезок CK так, что $CK \parallel AB$, $CK \cap AD = K$, $CK \cap EF = N$.

2. $BC \parallel AD$, $CK \parallel AB$, следовательно, ABCK – параллелограмм (по определению) и тогда по свойству параллелограмма AK=BC=18.

3. $EF \parallel BC$, $CK \parallel AB$, следовательно, BCNE – параллелограмм (по определению) и тогда по свойству параллелограмма EN=BC=18.

4. По условию $EF \parallel AD$, KN – секущая, тогда $\angle FNC = \angle DKC$ по свойству соответсвенных углов.

5. $AD = 33$, AK=18, следовательно, $KD = AD - AK = 33 - 18 = 15$.

6. $CF : DF = 2 : 1$, следовательно, $CF : CD = 2 : 3$.

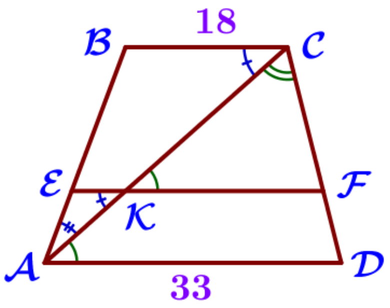
7. Рассмотрим $\triangle NCF$ и $\triangle KCD$: $\angle FNC = \angle DKC$ (п. 4), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle NCF \sim \triangle KCD$ по двум углам, тогда $\frac{NF}{KD} = \frac{CF}{CD}$.

8. KD=15 (п. 5), $CF : CD = 2 : 3$ (п. 6), $\frac{NF}{KD} = \frac{CF}{CD}$ (п. 7), тогда $\frac{NF}{15} = \frac{2}{3}$, а $NF = \frac{15 \cdot 2}{3} = 10$.

9. $EF = EN + NF = 18 + 10 = 28$.

Ответ: $EF = 28$.

12.2. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.



Дано:
ABCD – трапеция, $BC \parallel AD$, $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$, $EF \cap AB = E$, $EF \cap CD = F$, $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.

Найти: EF.

Решение:

1. Проведем отрезок AC, $AC \cap EF = K$.

2. По условию $EF \parallel AD$, AK – секущая, тогда $\angle FKC = \angle DAC$ по свойству соответсвенных углов.

3. $CF : DF = 2 : 1$, следовательно, $CF : CD = 2 : 3$.

4. Рассмотрим $\triangle KCF$ и $\triangle ACD$: $\angle FKC = \angle DAC$ (п. 2), $\angle C$ – общий, следовательно, $\triangle KCF \sim \triangle ACD$ по двум углам, тогда $\frac{CK}{AC} = \frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD}$.

5. $AD = 33$ (по условию), $CF : CD = 2 : 3$ (п. 3), $\frac{KF}{AD} = \frac{CF}{CD}$ (п. 4), тогда $\frac{KF}{33} = \frac{2}{3}$, а $KF = \frac{33 \cdot 2}{3} = 22$.

6. $\frac{CK}{AC} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}$, следовательно, $AK : AC = 1 : 3$.

7. По условию $EF \parallel BC$, AK – секущая, тогда $\angle AKE = \angle ACB$ по свойству соответсвенных углов.

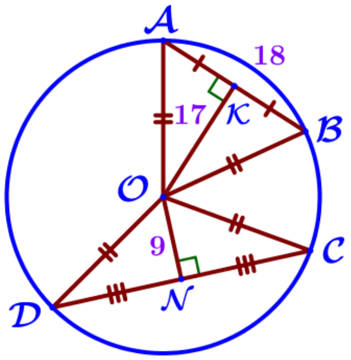
8. Рассмотрим $\triangle AEK$ и $\triangle ABC$: $\angle AKE = \angle ACB$ (п. 7), $\angle A$ – общий, следовательно, $\triangle AEK \sim \triangle ABC$ по двум углам, тогда $\frac{EK}{BC} = \frac{AK}{AC}$.

9. $BC = 18$ (по условию), $AK : AC = 1 : 3$ (п. 6), $\frac{EK}{BC} = \frac{AK}{AC}$ (п. 8), тогда $\frac{EK}{18} = \frac{1}{3}$, а $EK = \frac{18 \cdot 1}{3} = 6$.

10. $EF = EK + KF = 6 + 22 = 28$.

Ответ: $EF = 28$.

13. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB = 18, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 17 и 9.



Дано:
O – центр окружности, AB и CD – хорды, AB=18, расстояние от O до AB равно 17, расстояние от O до CD равно 9.

Найти: CD.

Решение:

1. Пусть OK – расстояние от O до AB, то есть $OK \cap AB = K$, $OK \perp AB$, $OK = 17$.

2. Пусть ON – расстояние от O до CD, то есть $ON \cap CD = N$, $ON \perp CD$, $ON = 9$.

3. Проведем радиусы OA, OB, OC и OD.

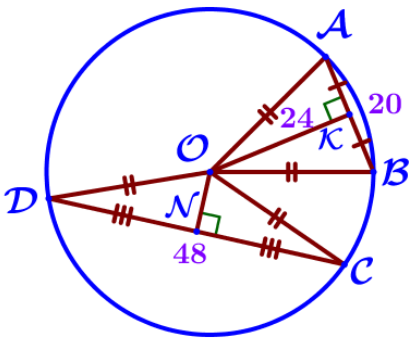
4. Рассмотрим $\triangle AOB$: OA=OB (радиусы), тогда $\triangle AOB$ – равнобедренный по определению, а OK – высота ($OK \perp AB$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, OK – медиана, поэтому K – середина AB, $AK = AB : 2 = 18 : 2 = 9$.

5. Рассмотрим $\triangle AOK$ и $\triangle OCN$: $\angle AKO = 90°$ ($OK \perp AB$), то есть $\triangle AOK$ – прямоугольный, $\angle ONC = 90°$ ($ON \perp CD$), то есть и $\triangle OCN$ – прямоугольный; AO=OC (радиусы), $AK = ON$ ($AK = 9$, $ON = 9$), тогда $\triangle AOK = \triangle OCN$ по гипотенузе и катету, следовательно, CN=OK=17.

6. Рассмотрим $\triangle COD$: OC=OD (радиусы), тогда $\triangle COD$ – равнобедренный по определению, а ON – высота ($ON \perp CD$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, ON – медиана, поэтому N – середина CD, $CD = CN \cdot 2 = 17 \cdot 2 = 34$.

Ответ: $CD = 34$.

14. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если AB = 20, CD = 48, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.



Дано:
O – центр окружности, AB и CD – хорды, AB = 20, CD = 48, расстояние от O до AB равно 24.

Найти: расстояние от O до CD.

Решение:

1. Пусть OK – расстояние от O до AB, то есть $OK \cap AB = K$, $OK \perp AB$, $OK = 24$.
2. Пусть ON – расстояние от O до CD, то есть $ON \cap CD = N$, $ON \perp CD$.
3. Проведем радиусы OA, OB, OC и OD.
4. Рассмотрим $\triangle AOB$: OA=OB (радиусы), тогда $\triangle AOB$ – равнобедренный по определению, а OK – высота ($OK \perp AB$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, OK – медиана, поэтому K – середина AB, $AK = AB:2 = 20:2 = 10$.
5. Рассмотрим $\triangle AOK$: $OK = 24$, $AK = 10$; $\angle AKO = 90°$ ($OK \perp AB$), следовательно, $\triangle AOK$ – прямоугольный и OA можно найти по т. Пифагора:

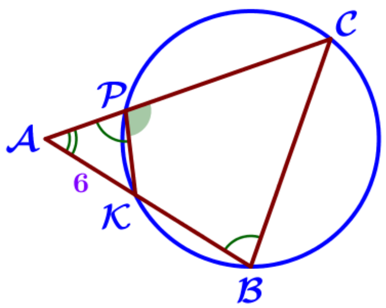
$$OA^2 = AK^2 + OK^2, \qquad OA^2 = 676,$$
$$OA^2 = 10^2 + 24^2, \qquad OA = 26.$$

6. Рассмотрим $\triangle COD$: OC=OD (радиусы), тогда $\triangle COD$ – равнобедренный по определению, а ON – высота ($ON \perp CD$) в р/б треугольнике, проведённая к основанию, следовательно, ON – медиана, поэтому N – середина CD, $CN = CD:2 = 48:2 = 24$.
7. Рассмотрим $\triangle CON$: OC=OA=26 (радиусы), $CN = 24$; $\angle ONC = 90°$ так как $ON \perp CD$, следовательно, $\triangle CON$ – прямоугольный и ON можно найти по т. Пифагора:

$$OC^2 = ON^2 + NC^2, \qquad ON^2 = 26^2 - 24^2,$$
$$ON^2 = OC^2 - NC^2, \qquad ON^2 = 100,$$
$$ON = 10.$$

Ответ: расстояние от O до CD равно 10.

15. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если AK=6, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC.



Дано:
$\triangle ABC$, окружность проходит через вершины B и C и пересекает AB в точке K, AC – в точке P, AK=6, AC=1,2BC.

Найти: KP.

Решение:

1. Четырехугольник BCPK вписан в окружность, поэтому по свойству вписанного четырехугольника $\angle CBK + \angle CPK = 180°$, откуда $\angle CBK = 180° - \angle CPK$.
2. $\angle KPA$ и $\angle CPK$ – смежные, поэтому $\angle KPA + \angle CPK = 180°$, тогда $\angle KPA = 180° - \angle CPK$.

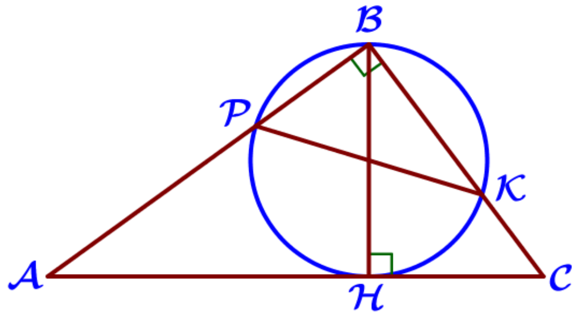
3. $\angle CBK = 180° - \angle CPK$ (п.1), $\angle KPA = 180° - \angle CPK$ (п.2), следовательно, $\angle CBK = \angle KPA$.

4. Рассмотрим треугольники ABC и APK:

$\angle CBA = \angle KPA$ (п. 3), $\angle A$ – общий, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle APK$ по двум углам, тогда $\frac{AC}{AK} = \frac{CB}{KP}$, откуда $KP = \frac{AK \cdot BC}{AC} = \frac{6 \cdot BC}{1{,}2BC} = \frac{60}{12} = 5$.

Ответ: $KP = 5$.

16. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если PK = 8.



Дано:
$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle B = 90°$, BH – высота, окружность с диаметром BH пересекает AB в точке P, BC – в точке K, PK = 8.

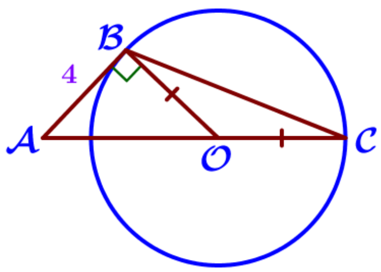
Найти: BH.

Решение:
1. $\angle B$ вписан в окружность и опирается на дугу PHK, следовательно, по теореме о вписанном угле $\angle B = \frac{1}{2} \smile PHK$, $\smile PHK = \angle B \cdot 2 = 90° \cdot 2 = 180°$, то есть $\smile PHK$ – полуокружность, PK – диаметр.

2. BH и PK – диаметры одной окружности, значит $BH = PK = 8$.

Ответ: $BH = 8$.

17. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 8,4, а AB = 4.



Дано:
$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается AB в точке B, диаметр окружности равен 8,4, AB = 4.

Найти: AC.

Решение:
1. Проведем радиус OB.

2. Диаметр окружности равен 8,4, OB и OC – радиусы, следовательно, $OB = OC = 8{,}4 : 2 = 4{,}2$.

3. AB – касательная, OB – радиус, B – точка касания, тогда по свойству касательной $OB \perp AB$.

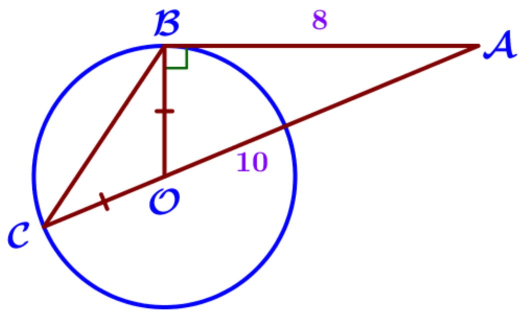
4. Рассмотрим $\triangle ABO$: $\angle ABO = 90^\circ$ $(OB \perp AB)$, следовательно, $\triangle ABO$ – прямоугольный; $AB = 4$ (по условию), $OB = 4{,}2$ (п.2), найдем AO по т. Пифагора:

$$AO^2 = AB^2 + OB^2, \qquad AO^2 = 33{,}64,$$
$$AO^2 = 4^2 + 4{,}2^2, \qquad AO = 5{,}8.$$

5. $AC = AO + OC = 5{,}8 + 4{,}2 = 10$.

Ответ: $AC = 10$.

18.1. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 8$, $AC = 10$.



Дано:
$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается AB в точке B, $AB = 8$, $AC = 10$.

Найти: диаметр окружности.

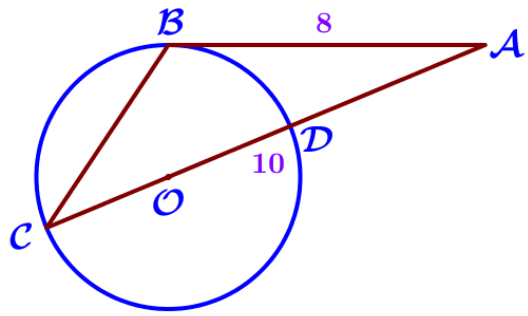
Решение:
1. Проведем радиус OB.
2. OB и OC – радиусы, следовательно, $OC = OB$.
3. $AC = AO + OC$, следовательно, $AO = AC - OC = 10 - OB$.
4. AB – касательная, OB – радиус, B – точка касания, тогда по свойству касательной $OB \perp AB$.
5. Рассмотрим $\triangle ABO$: $\angle ABO = 90^\circ$ $(OB \perp AB)$, следовательно, $\triangle ABO$ – прямоугольный; $AB = 8$ (по усл.), $AO = 10 - OB$ (п.3), найдем OB по т. Пифагора:

$$OB^2 + AB^2 = AO^2,$$
$$OB^2 + 8^2 = (10 - OB)^2,$$
$$OB^2 + 8^2 = 100 - 20 \cdot OB + OB^2,$$
$$OB^2 - OB^2 + 20 \cdot OB = 100 - 64,$$
$$20 \cdot OB = 36,$$
$$OB = \frac{36}{20}, \qquad OB = 1{,}8.$$

4. Радиус окружности равен 1,8, следовательно, диаметр – 3,6.

Ответ: диаметр окружности равен 3,6.

18.2. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB = 8, AC = 10.



Дано:
$\triangle ABC$, O – центр окружности, $O \in AC$, окружность проходит через точку C и касается AB в точке B, AB = 8, AC = 10.

Найти: диаметр окружности.

Решение:
1. Пусть D – точка пересечения окружности со стороной AC, CD – диаметр.

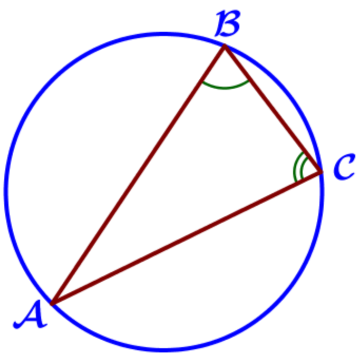
2. $AC = AD + CD$, следовательно, $AD = AC - CD = 10 - CD$.

3. AB – касательная, AC – секущая, тогда по свойству секущей и касательной, проведенных из одной точки к окружности:

$$AB^2 = AD \cdot AC, \quad 10 \cdot CD = 100 - 64,$$
$$8^2 = (10 - CD) \cdot 10, \quad 10 \cdot CD = 36,$$
$$64 = 100 - 10 \cdot CD, \quad CD = 3{,}6.$$

Ответ: диаметр окружности равен 3,6.

19.1. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 89°$, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 8.

Найти: BC.

Решение:
1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B = 61°$, $\angle C = 89°$, тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle A$:

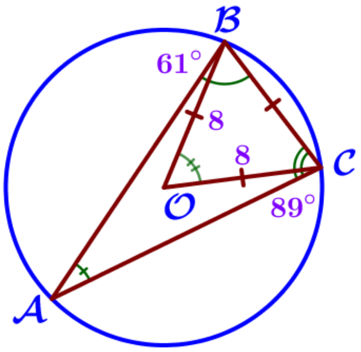
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°,$$
$$\angle A = 180° - \angle B - \angle C,$$
$$\angle A = 180° - 61° - 89°,$$
$$\angle A = 30°.$$

2. По расширенной теореме синусов известно, что $\frac{BC}{\sin\angle A}=2R$; R – радиус описанной окружности, R=8 (по условию), $\angle A=30°$ (п. 1), тогда

$$BC=2R\cdot\sin\angle A=2\cdot 8\cdot\sin 30°=16\cdot\frac{1}{2}=8.$$

Ответ: $BC=8$.

19.2. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 61° и 89°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle B=61°$, $\angle C=89°$, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 8.

Найти: BC.

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle B=61°$, $\angle C=89°$, тогда по теореме о сумме углов треугольника найдем $\angle A$:

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°,$$
$$\angle A=180°-\angle B-\angle C,$$
$$\angle A=180°-61°-89°,$$
$$\angle A=30°.$$

2. $\angle A$ вписан в окружность и опирается на дугу BC, следовательно, по теореме о вписанном угле $\angle A=\frac{1}{2}\smile BC$, откуда $\smile BC=\angle A\cdot 2=30°\cdot 2=60°$.

3. Пусть O – центр окружности, тогда $\angle BOC$ – центральный и $\angle BOC=\smile BC=60°$.

4. OB и OC – радиусы окружности, следовательно, OB=OC=8.

5. Рассмотрим $\triangle BOC$:

а) так как OB=OC, то $\triangle BOC$ – равнобедренный (с основанием BC) по определению, следовательно, $\angle OBC=\angle OCB$;

б) $\angle BOC=60°$, $\angle OBC=\angle OCB$, тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle OBC=\angle OCB=\frac{180°-\angle BOC}{2}=\frac{180°-60°}{2}=60°$;

в) $\angle BOC=60°$, $\angle OBC=60°$, то есть $\angle BOC=\angle OBC$, тогда $\triangle BOC$ – равнобедренный (с основанием OB) по признаку равнобедренного треугольника, следовательно, $BC=OC=8$.

Ответ: $BC=8$.