10. Статистика, вероятности

Теория вероятностей

Вероятность – доля успеха того или иного события.

Классическое определение вероятности:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{количество всех возможных исходов}}$$

Опыт №1: бросание игральной кости

Исходы (равновозможные элементарные события): $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ $\quad n=6$

События: A – выпадение 2-х очков
B – выпадение четного числа очков
C – выпадение менее 7-ми очков
D – выпадение 8-ми очков

Вероятности:

$P(A)=\dfrac{1}{6}$ $\quad m=1:\ \{2\}$, $\ n=6:\ \{1;2;3;4;5;6\}$ $\quad$ A – случайное событие $\quad 0<P(A)<1$

$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ $\quad m=3:\ \{2;4;6\}$, $\ n=6:\ \{1;2;3;4;5;6\}$ $\quad$ B – случайное событие $\quad 0<P(B)<1$

$P(C)=\dfrac{6}{6}=1$ $\quad m=6:\ \{1;2;3;4;5;6\}$, $\ n=6:\ \{1;2;3;4;5;6\}$ $\quad$ C – достоверное событие $\quad P(C)=1$

$P(D)=\dfrac{0}{6}=0$ $\quad m=0:\ \varnothing$, $\ n=6:\ \{1;2;3;4;5;6\}$ $\quad$ D – невозможное событие $\quad P(D)=0$

Опыт №2: бросание двух монет

Исходы: $\{ОО;\ ОР;\ РО;\ РР\}$ $\quad n=4$

События: A – оба раза выпадет «орел»
B – «решка» выпадет более одного раза
C – «решка» выпадет не более одного раза
D – «орел» выпадет ровно один раз

Вероятности:

$P(A)=\dfrac{1}{4}$ $\quad m=1:\ \{ОО\}$, $\ n=4:\ \{ОО;ОР;РО;РР\}$

$P(D)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\quad m=2:\ \{ОР;РО\}$, $\ n=4:\ \{ОО;ОР;РО;РР\}$

$P(B)=\dfrac{1}{4}$ $\quad m=1:\ \{РР\}$, $\ n=4:\ \{ОО;ОР;РО;РР\}$

$P(C)=\dfrac{3}{4}$ $\quad m=3:\ \{ОО;ОР;РО\}$, $\ n=4:\ \{ОО;ОР;РО;РР\}$

События B и C – противоположные
$P(B)+P(C)=1$

Элементы комбинаторики

Правило произведения: Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует различных $n \cdot m$ пар с выбранными первым и вторым элементами.

Опыт №3: **бросание трех монет**

Количество исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Исходы: {ООО; ООР; ОРО; ОРР, РОО; РОР; РРО; РРР} $n = 8$

События: А – «орел» выпадет ровно два раза
В – «орел» выпадет не менее одного раза

Вероятности:

$P(A) = \dfrac{3}{8}$ $m = 3$: $\{OOP; OPO; POO\}$
$n = 8$: $\{OOO; OOP; OPO; OPP; POO; POP; PPO; PPP\}$

$P(B) = \dfrac{7}{8}$ $m = 7$: $\{OOO; OOP; OPO; OPP; POO; POP; PPO\}$
$n = 8$: $\{OOO; OOP; OPO; OPP; POO; POP; PPO; PPP\}$

Опыт №4: **выбор трехзначного числа**

Количество исходов: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ *(на первом месте не может стоять «0»)*

Исходы: {100; 101; ...; 998; 999} $n = 900$

События: А – выбранное трехзначное число делится на 5
В – выбранное трехзначное число делится на 24

Вероятности:

$P(A) = \dfrac{180}{900} = \dfrac{1}{5}$ $m = 180$: $\{9 \cdot 10 \cdot 2 = 180\}$ *последняя цифра «0» или «5»*
$n = 900$: $\{100; 101; \ldots; 998; 999\}$

$P(B) = \dfrac{37}{900}$ $m = 37$: $\left\{100 \le 24k \le 999,\ k \in Z \Rightarrow 4\dfrac{1}{6} \le k \le 41\dfrac{5}{8} \Rightarrow k = 41 - 4 = 37\right\}$
$n = 900$: $\{100; 101; \ldots; 998; 999\}$

Сложение и умножение вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 2. Для независимых событий справедливо: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в том, что происходят оба этих события.
Два события называются **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого.

Опыт №5: **бросание двух игральных костей**

Количество исходов: $6 \cdot 6 = 36$

Исходы:

11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

События:

A – сумма выпавших чисел равна 7 или 8

B – выпало хотя бы одно число, большее 4

A_1 – сумма выпавших чисел равна 7

A_2 – сумма выпавших чисел равна 8

Вероятности:

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	**26**
31	32	33	**34**	**35**	36
41	42	**43**	**44**	45	46
51	**52**	**53**	54	55	56
61	**62**	63	64	65	66

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

11	12	13	14	**15**	**16**
21	22	23	24	**25**	**26**
31	32	33	34	**35**	**36**
41	42	43	44	**45**	**46**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

$$P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$ $m = 20$, $n = 36$

Опыт №6: **стрельба по мишени (известна вероятность попадания)**

Вероятность попадания при одном выстреле: $P = 0{,}7$.

События:

A – стрелок выстрелил и попал

$\overline{A}$ – стрелок выстрелил и не попал (промахнулся)

B – стрелок три раза выстрелил: в первый раз попал, а потом два раза не попал (промахнулся)

C – стрелок из четырех выстрелов не попал ни разу

Вероятности:

$P(A) = 0{,}7$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ (события A и $\overline{A}$ – противоположные, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$)

$P(B) = P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$ (каждое попадание/промах – независимое событие)

$P(C) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081$ (каждый промах – независимое событие)

Опыт №7: покупка лотерейного билета (дана вероятность выигрыша)

Вероятность получить главный приз равна 0,0001,
поощрительный приз – 0,0009.

События:
A – купленный билет «выиграет»
$\overline{A}$ – купленный билет «не выиграет»

Вероятности:
$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0{,}0001+0{,}0009=0{,}001$, где
A_1 – купленный билет «выиграет главный приз»
A_2 – купленный билет «выиграет поощрительный приз»

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}001=0{,}999$ (события A и $\overline{A}$ – противоположные)

Статистика

Статистическое определение вероятности:

$$P(A)\approx W(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\text{количество успешных опытов (частота события A)}}{\text{количество всех опытов}}$$

$W(A)$ – относительная частота события A

Опыт №8: выбор ручки (известны статистические данные)

В среднем из 200 ручек три бракованные.
Какова вероятность купить хорошую ручку?

События:
A – выбранная ручка бракованная
$\overline{A}$ – выбранная ручка небракованная (хорошая)

Вероятность:

$P(A)\approx W(A)=\frac{3}{200}=0{,}015$ $\quad n_A=3$, $n=200$ $\quad P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}015=0{,}985$

Опыт №9: бросание монеты 100 раз

Монету подбросили 100 раз, «орел» выпал 52 раза. Насколько относительная частота выпадения «орла» отличается от вероятности этого события?

Событие A – выпадет «орел»

Вероятность:

$P(A)=\frac{1}{2}$ $\quad m=1:\ \{O\}$, $n=2:\ \{O;P\}$

Относительная частота:

$W(A)=\frac{52}{100}$ $\quad n_A=52$, $n=100$

$$W(A)-P(A)=\frac{52}{100}-\frac{1}{2}=\frac{52}{100}-\frac{50}{100}=\frac{2}{100}=0{,}02$$