15. Неравенства
Часть 1. ФИПИ (www.fipi.ru) + другие источники (*)

I) Показательные неравенства

Задание 1. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{5^x+31}\le\dfrac{4}{5^{x+1}-1}$;

2) $\dfrac{2}{7^x-7}\ge\dfrac{5}{7^x-4}$;

3) $\dfrac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge0$;

4) $\dfrac{15}{(4^{2-x^2}-1)^2}-\dfrac{16}{4^{2-x^2}-1}+1\ge0$ *;

5) $\dfrac{3^x-1}{3^x-3}\le1+\dfrac{1}{3^x-2}$;

6) $\dfrac{4^x-2}{4^x-3}\le1-\dfrac{1}{4^x-4}$ *;

7) $\dfrac{13-5\cdot3^x}{9^x-12\cdot3^x+27}\ge0{,}5$;

8) $\dfrac{7-2\cdot2^x}{4^x-12\cdot2^x+32}\ge0{,}25$ *;

9) $\dfrac{2^x}{2^x-3}+\dfrac{2^x+1}{2^x-2}+\dfrac{5}{4^x-5\cdot2^x+6}\le0$;

10) $\dfrac{5^x}{5^x-4}+\dfrac{5^x+5}{5^x-5}+\dfrac{22}{25^x-9\cdot5^x+20}\le0$ *;

11) $\dfrac{9^x-2\cdot3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot3^{x+1}-51}{3^x-9}\le3^x+5$;

12) $2^x-6-\dfrac{9\cdot2^x-37}{4^x-7\cdot2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$;

13) $\dfrac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot2^x+4}\le\dfrac{2^x-9}{2^x-4}+\dfrac{1}{2^x-6}$;

14) $\dfrac{9^x-3^x+2}{9^x-3^x}+\dfrac{5\cdot3^x-19}{3^x-4}\le\dfrac{2\cdot3^{x+1}-2}{3^x}$;

15) $\dfrac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1}+\dfrac{25^x-7\cdot5^x+1}{5^x-7}\le2\cdot5^x-24$;

16) $\dfrac{4^x+2^{x+1}-36}{2^x-5}+\dfrac{4^{x+1}-2^{x+5}+4}{2^x-8}\le5\cdot2^x+7$ *;

17) $\dfrac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge0$;

18) $\dfrac{10^x-25\cdot2^x-2\cdot5^x+50}{5x-x^2-4}\ge0$;

19) $125^x-25^x+\dfrac{4\cdot25^x-20}{5^x-5}\le4$;

20) $8^x-3\cdot4^x+\dfrac{9\cdot4^x-288}{2^x-9}\le32$ *.

II) Логарифмические неравенства

Задание 2. Решите неравенство:

1) $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\ge0$;

2) $\log_3^2(81-x^2)-7\log_3(81-x^2)+12\ge0$;

3) $\log_2^2(x^2-9)-9\log_2(x^2-9)+20\ge0$;

4) $\log_3^2(x^2-16)-5\log_3(x^2-16)+6\ge0$;

5) $\left(\log_2^2x-2\log_2x\right)^2+36\log_2x+45<18\log_2^2x$;

6) $\left(\log_2^2x-2\log_2x\right)^2+22\log_2x+24<11\log_2^2x$ *;

7) $9\log_{12}(x^2-3x-4)\le10+\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$;

8) $11\log_{11}(x^2+x-20)\le12+\log_{11}\dfrac{(x+5)^{11}}{x-4}$;

9) $\dfrac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2x-9}\ge-1$;

10) $\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2x-36}\ge-1$;

11) $\dfrac{2\log_9(x^2+4x)}{\log_9x^2}\le1$;

12) $\dfrac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5x^2}\le1$;

13) $\dfrac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2x+\log_3x^4}\le1$;

14) $\dfrac{\log_7(49x)-3}{\log_7^2x+\log_7x^2}\le1$ *.

Задание 3. Решите неравенство:

1) $1+\dfrac{5}{\log_4 x-3}+\dfrac{6}{\log_4^2 x-\log_4(64x^6)+12}\ge 0$;

2) $1+\dfrac{10}{\log_2 x-5}+\dfrac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\ge 0$;

3) $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$;

4) $\dfrac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\dfrac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\ge\dfrac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$;

5) $\dfrac{\log_2(32x)}{\log_2 x-5}+\dfrac{\log_2 x-5}{\log_2(32x)}\ge\dfrac{\log_2 x^{16}+18}{\log_2^2 x-25}$;

6) $\dfrac{\log_3(81x)}{\log_3 x-4}+\dfrac{\log_3 x-4}{\log_3(81x)}\ge\dfrac{24-\log_3 x^8}{\log_3^2 x-16}$;

7) $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|}\le 0$;

8) $\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le 0$;

9) $\dfrac{\log_8 x}{\log_8\left(\dfrac{x}{64}\right)}\ge\dfrac{2}{\log_8 x}+\dfrac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}$;

10) $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\dfrac{x}{27}\right)}\ge\dfrac{2}{\log_3 x}+\dfrac{5}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}$;*

11) $\log_2^2(8+2x-x^2)+9\log_{0,5}(8+2x-x^2)+18>0$;

12) $\log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0,5}(16+6x-x^2)+24>0$;

13) $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$;

14) $\log_{49}(x+4)+\log_{(x^2+8x+16)}\sqrt{7}\le -\dfrac{3}{4}$;

15) $\log_{16}(x+5)+\log_{(x^2+10x+25)}2\ge\dfrac{3}{4}$;

16) $(2-3x)\cdot\log_{2x-1}(x^2-2x+2)\le 0$;

17) $(20-11x)\cdot\log_{5x-9}(x^2-4x+5)\le 0$;

18) $\dfrac{\log_x(2x^{-1})\cdot\log_x(2x^2)}{\log_{(2x)}x\cdot\log_{(2x^{-2})}x}<40$;

19) $\dfrac{\log_x(5x^{-1})\cdot\log_x(5x^3)}{\log_{(5x)}x\cdot\log_{(5x^{-3})}x}<105$*.