

**24. Геометрическая задача на доказательство****Часть 1. ФИПИ**

1. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что отрезки  $AE$  и  $CF$  равны.
2. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что отрезки  $BP$  и  $DQ$  равны.\*
3. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Докажите, что отрезки  $BK$  и  $DM$  равны.
4. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $L$  и  $N$  соответственно. Докажите, что отрезки  $CL$  и  $AN$  равны.\*
5. Сторона  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $CD$ . Точка  $M$  – середина стороны  $AD$ . Докажите, что  $CM$  – биссектриса угла  $BCD$ .
6. Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  – середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  – биссектриса угла  $BAD$ .
7. Сторона  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AD$ . Точка  $L$  – середина стороны  $AB$ . Докажите, что  $DL$  – биссектриса угла  $ADC$ .
8. Сторона  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $BC$ . Точка  $N$  – середина стороны  $CD$ . Докажите, что  $BN$  – биссектриса угла  $ABC$ .
9. Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , лежащей на стороне  $CD$ . Докажите, что  $M$  – середина  $CD$ .
10. Биссектрисы углов  $C$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $L$ , лежащей на стороне  $AB$ . Докажите, что  $L$  – середина  $AB$ .
11. Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , лежащей на стороне  $AD$ . Докажите, что  $M$  – середина  $AD$ .
12. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , лежащей на стороне  $BC$ . Докажите, что  $K$  – середина  $BC$ .
13. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , лежащей на стороне  $BC$ . Докажите, что точка  $M$  равноудалена от прямых  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$ .

- 14.** Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , лежащей на стороне  $CD$ . Докажите, что точка  $K$  равноудалена от прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $AD$ .
- 15.** Биссектрисы углов  $C$  и  $D$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , лежащей на стороне  $AB$ . Докажите, что точка  $P$  равноудалена от прямых  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ .
- 16.** Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , лежащей на стороне  $AD$ . Докажите, что точка  $O$  равноудалена от прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ .
- 17.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрали произвольную точку  $E$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BEC$  и  $AED$  равна половине площади параллелограмма.
- 18.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрали произвольную точку  $F$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BFC$  и  $AFD$  равна половине площади параллелограмма.
- 19.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрали произвольную точку  $E$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $AEB$  и  $CED$  равна половине площади параллелограмма.\*
- 20.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрали произвольную точку  $F$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $AFB$  и  $CFD$  равна половине площади параллелограмма.\*
- 21.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны.
- 22.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  диагонали пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что площади треугольников  $APB$  и  $CPD$  равны.
- 23.** Точка  $E$  – середина боковой стороны  $AB$  трапеции  $ABCD$ . Докажите, что площадь треугольника  $ECD$  равна половине площади трапеции.
- 24.** Точка  $K$  – середина боковой стороны  $CD$  трапеции  $ABCD$ . Докажите, что площадь треугольника  $KAB$  равна половине площади трапеции.
- 25.** На средней линии трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  выбрали произвольную точку  $E$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BEC$  и  $AED$  равна половине площади трапеции.
- 26.** На средней линии трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  выбрали произвольную точку  $K$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BKC$  и  $AKD$  равна половине площади трапеции.

- 27.** На средней линии трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  выбрали произвольную точку  $F$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BFC$  и  $AFD$  равна половине площади трапеции.
- 28.** На средней линии трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  выбрали произвольную точку  $K$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $BKC$  и  $AKD$  равна половине площади трапеции.
- 29.** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 4 и 64,  $BD=16$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.
- 30.** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 7 и 28,  $BD=14$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.
- 31.** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 5 и 45,  $BD=15$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.
- 32.** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны соответственно 2 и 32,  $BD=8$ . Докажите, что треугольники  $CBD$  и  $BDA$  подобны.
- 33.** Известно, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность и что продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  четырёхугольника пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что треугольники  $KAB$  и  $KCD$  подобны.
- 34.** Известно, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность и что продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырёхугольника пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что треугольники  $MBC$  и  $MDA$  подобны.
- 35.** В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $ACB$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что треугольники  $A_1B_1C$  и  $ABC$  подобны.
- 36.** В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что треугольники  $A_1BC_1$  и  $ABC$  подобны.
- 37.** В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $BAC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что треугольники  $AB_1C_1$  и  $ABC$  подобны.
- 38.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что углы  $AA_1B_1$  и  $ABB_1$  равны.
- 39.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что углы  $CC_1A_1$  и  $CAA_1$  равны.
- 40.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что углы  $BB_1C_1$  и  $BCC_1$  равны.
- 41.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $DAC$  и  $DBC$  равны. Докажите, что углы  $CDB$  и  $CAB$  также равны.

- 42.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $BCA$  и  $BDA$  равны. Докажите, что углы  $ABD$  и  $ACD$  также равны.
- 43.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $CDB$  и  $CAB$  равны. Докажите, что углы  $BCA$  и  $BDA$  также равны.
- 44.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $ABD$  и  $ACD$  равны. Докажите, что углы  $DAC$  и  $DBC$  также равны.
- 45.** Окружности с центрами в точках  $P$  и  $Q$  пересекаются в точках  $K$  и  $L$ , причём точки  $P$  и  $Q$  лежат по одну сторону от прямой  $KL$ . Докажите, что прямые  $PQ$  и  $KL$  перпендикулярны.
- 46.** Окружности с центрами в точках  $E$  и  $F$  пересекаются в точках  $C$  и  $D$ , причём точки  $E$  и  $F$  лежат по одну сторону от прямой  $CD$ . Докажите, что  $CD$  и  $EF$  перпендикулярны.
- 47.** Окружности с центрами в точках  $I$  и  $J$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , причём точки  $I$  и  $J$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $IJ$  перпендикулярны.
- 48.** Окружности с центрами в точках  $M$  и  $N$  пересекаются в точках  $S$  и  $T$ , причём точки  $M$  и  $N$  лежат по одну сторону от прямой  $ST$ . Докажите, что прямые  $MN$  и  $ST$  перпендикулярны.
- 49.** Окружности с центрами в точках  $P$  и  $Q$  не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении  $a:b$ . Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как  $a:b$ .
- 50.** Окружности с центрами в точках  $I$  и  $J$  не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении  $m:n$ . Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как  $m:n$ .

### Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

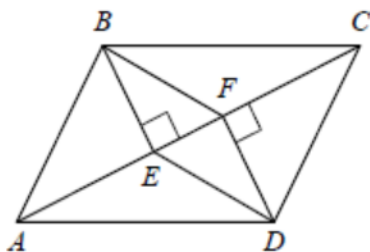
**1.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  равны. Оказалось, что отрезки  $BD$  и  $BE$  тоже равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

**2.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  равны. Оказалось, что углы  $AEB$  и  $BDC$  тоже равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

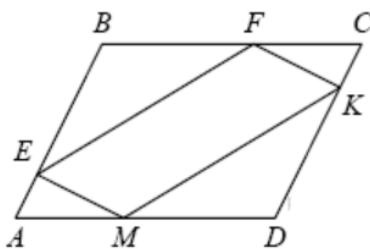
**3.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  – середина стороны  $CD$ . Известно, что  $EA = EB$ . Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

**4.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $K$  – середина стороны  $AB$ . Известно, что  $KC = KD$ . Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

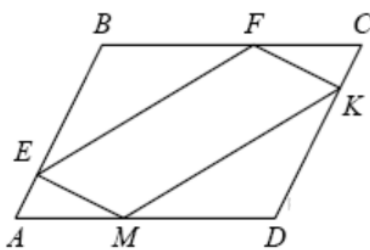
**5.** В параллелограмме  $KLMN$  точка  $B$  – середина стороны  $LM$ . Известно, что  $BK = BN$ . Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.



**6.** В параллелограмме  $ABCD$  проведены перпендикуляры  $BE$  и  $DF$  к диагонали  $AC$  (см. рис.). Докажите, что  $BFDE$  – параллелограмм.



**7.** В параллелограмме  $ABCD$  точки  $E$ ,  $F$ ,  $K$  и  $M$  лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём  $CF = AM$ ,  $BE = DK$ . Докажите, что  $EFKM$  – параллелограмм.



**8.** В параллелограмме  $ABCD$  точки  $E$ ,  $F$ ,  $K$  и  $M$  лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём  $AE = CK$ ,  $BF = DM$ . Докажите, что  $EFKM$  – параллелограмм.

**9.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  – середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно. Докажите, что треугольник  $MNK$  – равнобедренный.

**10.** В равностороннем треугольнике  $ABC$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  – середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно. Докажите, что  $MNK$  – равносторонний.

**11.** В равностороннем треугольнике  $ABC$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  – середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно. Докажите, что  $BMKN$  – ромб.

- 12.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.
- 13.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.
- 14.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.
- 15.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.
- 16.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что площадь параллелограмма  $ABCD$  в четыре раза больше площади треугольника  $AOB$ .
- 17.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что площадь параллелограмма  $ABCD$  в четыре раза больше площади треугольника  $AKD$ .
- 18.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что площадь параллелограмма  $ABCD$  в четыре раза больше площади треугольника  $BOC$ .
- 19.** Высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что углы  $AA_1B_1$  и  $ABB_1$  равны.
- 20.** Высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что углы  $AA_1C_1$  и  $ACC_1$  равны.
- 21.** Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что углы  $CC_1B_1$  и  $CBV_1$  равны.
- 22.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $A$ ,  $C$ , центр описанной окружности  $O$  и центр вписанной окружности  $I$  лежат на одной окружности. Докажите, что угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ .
- 23.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ , центр описанной окружности треугольника  $ABC$  и точка пересечения высот треугольника  $ABC$  лежат на одной окружности.