13. Стереометрическая задача
Блок 1. ФИПИ (www.fipi.ru) + другие источники

I) Куб

Задание 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=3. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

Задание 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=5. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=4:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

Задание 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=4. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

Задание 4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 3. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=2. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Задание 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=4. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Задание 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что KB=3. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.
а) Докажите, что $A_1P:PB_1=2:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

II) Параллелепипед

Задание 7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=5:3$ и $B_1F:FB=5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Задание 8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=2\sqrt{2}$, $AD=6$, $AA_1=10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=3:2$ и $B_1F:FB=3:7$. Точка T – середина ребра B_1C_1.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Задание 9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=4\sqrt{2}$, $AD=30$, $AA_1=35$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=6:1$ и $B_1F:FB=3:4$. Точка T – середина ребра B_1C_1.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Задание 10. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что AB=2, AD=6, $AA_1=6$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Задание 11. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:4$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=10$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Задание 12. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:6$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=6$, $AA_1=14$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Задание 13. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.
а) Докажите, что грань ABCD – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1=10$, $AB=12$.

Задание 14. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.
а) Докажите, что грань ABCD – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1=6$, $AB=4$.

Задание 15. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.
а) Докажите, что грань ABCD – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1=16$, $AB=15$.

Задание 16. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.
а) Докажите, что грань ABCD – квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1=12$, $AB=8$.

III) Четырехугольная призма

Задание 17. На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка K, причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если AB=4, $AA_1=6$.

Задание 18. На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка K, причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если AB=3, $AA_1=9$.

Задание 19. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

Задание 20. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём BK=1, $C_1L=4$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

Задание 21. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Задание 22. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1L=1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

IV) Треугольная призма

Задание 23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что AK=1. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Задание 24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём AK=2, $B_1L=4$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Задание 25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1L=2$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Задание 26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1L=3$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Задание 27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=1$.
а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что MNKL – квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Задание 28. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.
а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что MNKL – квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Задание 29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=3$.
а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN.

Задание 30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=2$.
а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN.

Задание 31. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный (AB=BC) треугольник ABC. Точка K – середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.
а) Докажите, что $KM \perp AC$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB=6, AC=8 и $AA_1=3$.

Задание 32. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный (AB=BC) треугольник ABC. Точка K – середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.
а) Докажите, что $KM \perp AC$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB=10, AC=16 и $AA_1=5$.

V) Четырехугольная пирамида

Задание 33. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=4 и BC=6. Длины боковых рёбер пирамиды SA=3, SB=5, $SD=3\sqrt{5}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Задание 34. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=12 и $BC=5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды SA=5, SB=13, SD=10.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Задание 35. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=8 и BC=6. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Задание 36. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=12 и BC=5. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3\sqrt{3}$, $SB=\sqrt{171}$, $SD=2\sqrt{13}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Задание 37. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=4 и BC=3. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Задание 38. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и BC=2. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.
а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Задание 39. Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причём $AB=2\sqrt{2}$, $BC=4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.
а) Докажите, что P – середина отрезка BQ.
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если SD=4.

Задание 40. Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=8$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.
а) Докажите, что P – середина отрезка BQ.
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если SD=8.

Задание 41. Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.
а) Докажите, что P – середина отрезка BQ.
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если SD=9.

Задание 42. Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причём $AB=4$, $BC=4\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.
а) Докажите, что P – середина отрезка BQ.
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если SD=8.

Задание 43. Основанием четырёхугольной пирамиды PABCD является трапеция ABCD, причём $\angle BAD+\angle ADC=90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD.
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды KBCP, если AB=BC=CD=4, а высота пирамиды PABCD равна 9.

Задание 44. Основанием четырёхугольной пирамиды PABCD является трапеция ABCD, причём $\angle BAD+\angle ADC=90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD.
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите объём пирамиды KBCP, если AB=BC=CD=2, а высота пирамиды PABCD равна 12.

Задание 45. В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со стороной AB=5 и диагональю BD=9. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания ABCD отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что SF=BE=4.
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Задание 46. В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со стороной AB=4 и диагональю BD=7. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания ABCD отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что SF=BE=3.
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Задание 47. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM=DN=4 и AK=3.
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

Задание 48. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM=DN=AK=2.
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

Задание 49. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM=2, SK=1. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K.
а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.
б) Найдите площадь сечения пирамиды SABCD плоскостью α.

Задание 50. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM=SK=1. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K.
а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.
б) Найдите площадь сечения пирамиды SABCD плоскостью α.

Задание 51. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём DN:NC=SK:KC=1:2. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Задание 52. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём DN:NC=SK:KC=1:3. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Задание 53. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка M, причём SM:MD=2:1. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Задание 54. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка M, причём SM:MD=1:2. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

VI) Треугольная пирамида

Задание 55. В основании правильной треугольной пирамиды ABCD лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что AT:TD=2:1. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.
а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
б) Найдите площадь сечения.

Задание 56. В основании правильной треугольной пирамиды ABCD лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что AT:TD=1:2. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.
а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
б) Найдите площадь сечения.

Задание 57. В пирамиде ABCD рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.
а) Докажите, что эта пирамида правильная.
б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём DM:MA=DN:NC=2:3. Найдите площадь сечения MNB.

Задание 58. В пирамиде ABCD рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 9\sqrt{2}$.
а) Докажите, что эта пирамида правильная.
б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём DM:MA=DN:NC=2:7. Найдите площадь сечения MNB.

Задание 59. В пирамиде ABCD рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.
а) Докажите, что эта пирамида правильная.
б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём DM:MA=DN:NC=1:2. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB.

Задание 60. В пирамиде ABCD рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 8\sqrt{2}$.
а) Докажите, что эта пирамида правильная.
б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём DM:MA=DN:NC=1:3. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB.

Задание 61. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Задание 62. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Задание 63. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 64. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 65. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 66. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 7. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 67. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 68. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием – сечение пирамиды SABC плоскостью α.

Задание 69. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM=AN=3 и $AK=\frac{7}{4}$.
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Задание 70. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна 2. На рёбрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM=AN=2 и $AK=\frac{4}{3}$.
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

Задание 71. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM=4, SK:KB=1:3.
а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите объём пирамиды BCKM.

Задание 72. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{37}$. На рёбрах AB и SA отмечены точки M и K соответственно, причём AM=2, SK:KB=1:3.
а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите объём пирамиды ACKM.

Задание 73. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды ABCD отмечены точки M и N соответственно, причём AM:MB=CN:NB=1:2. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.
а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Задание 74. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды ABCD отмечены точки M и N соответственно, причём AM:MB=CN:NB=3:1. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.
а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

VII) Шестиугольная пирамида

Задание 75. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 9. Точка M лежит на ребре AB, AM=1, а точка K лежит на ребре SC. Известно, что MK=KD.
а) Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите площадь треугольника DKM.

Задание 76. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. Точка M лежит на ребре AB, AM=3, а точка K лежит на ребре SC. Известно, что MK=KD.
а) Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите площадь треугольника DKM.

Задание 77. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.
а) Докажите, что KM=KD.
б) Найдите объём пирамиды CDKM.

Задание 78. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 9. Точка M – середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.
а) Докажите, что KM=KD.
б) Найдите объём пирамиды CDKM.

VIII) Цилиндр

Задание 79. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объёма цилиндра, если $AB=7$, $BB_1=24$, $B_1C_1=10$.

Задание 80. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объёма цилиндра, если $AB=9$, $BB_1=12$, $B_1C_1=8$.

Задание 81. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=20$, $BB_1=15$, $B_1C_1=21$.

Задание 82. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=15$, $BB_1=21$, $B_1C_1=20$.

Задание 83. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB=6$, $BB_1=15$, $B_1C_1=8$.

Задание 84. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите угол между прямыми BB_1 и A_1C_1, если AB=20, BB_1=15, B_1C_1=21.

Задание 85. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1, если AB=21, BB_1=12, B_1C_1=16.

Задание 86. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1, если AB=15, BB_1=16, B_1C_1=12.

Задание 87. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, CC_1=2.
а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°.
б) Найдите объём цилиндра.

Задание 88. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{6}$, $CC_1 = 2\sqrt{3}$.
а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°.
б) Найдите объём цилиндра.

Задание 89. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = 1$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 90. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1=4$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 91. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.

Задание 92. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1=6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.