

13. Неравенства ТЕОРИЯ

Числовые неравенства

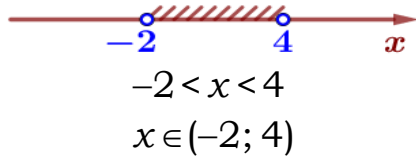
Вся числовая ось



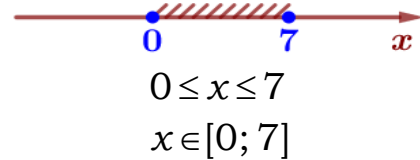
$$x \in \mathbb{R}$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

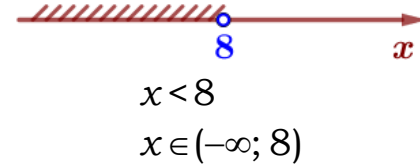
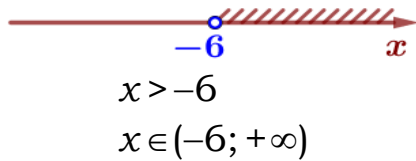
Интервал



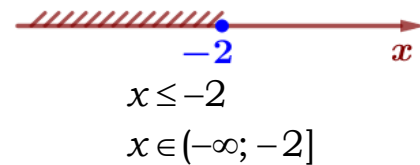
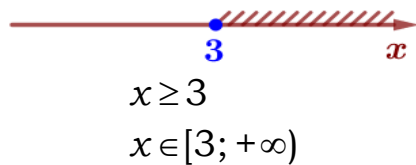
Отрезок



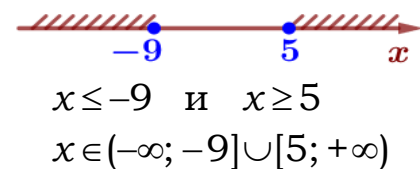
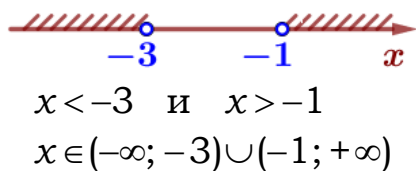
Открытый луч



Закрытый луч



Объединение лучей



Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или установить, что их нет.

Свойства неравенств

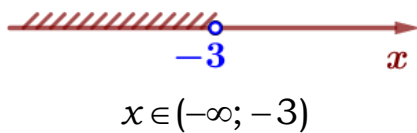
1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если число положительно, то знак неравенства не меняется, если отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

Линейные неравенства

Общий вид: Алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным:
 $ax > b$ $ax \geq b$
 $ax < b$ $ax \leq b$
 1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
 2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

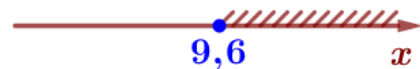
Пример 1. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 6x - 7 > 10x + 5 \\ 6x - 10x > 5 + 7 \\ -4x > 12 \quad | :(-4) \quad -4 < 0 \\ x < -3 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -3)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 17x - 4(3x - 8) \geq 80 \\ 17x - 12x + 32 \geq 80 \\ 5x \geq 80 - 32 \\ 5x \geq 48 \quad | :5 \\ x \geq 9,6 \end{aligned}$$



$$x \in [9,6; +\infty)$$

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Системы двух линейных неравенств

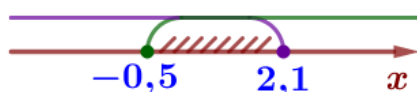
Алгоритм:

- 1) решить оба неравенства;
- 2) изобразить на числовой оси множество решений первого и второго неравенств системы;
- 3) определить значения неизвестного, которые одновременно принадлежат обоим интервалам.

Пример 2. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2,1 \leq 0 \\ -2x + 2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 1 \quad | :(-2) \end{cases}$$

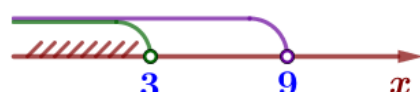
$$\begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 3 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ x \geq -0,5 \end{cases}$$



$$x \in [-0,5; 2,1]$$

$$\text{б) } \begin{cases} -72 + 8x < 0 \\ 5 - 6x > -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ -6x > -18 \quad | :(-6) \end{cases}$$

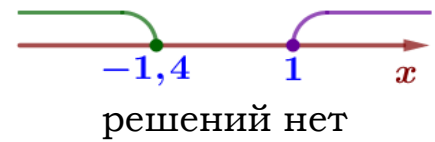
$$\begin{cases} 8x < 72 \quad | :8 \\ -6x > -13 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 3)$$

Пример 3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x-3 \geq -2 \\ x+1,4 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2+3 \\ x \leq -1,4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1,4 \end{cases}$$



Квадратные неравенства:

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a \neq 0$$

< – знак неравенства
($\leq, \geq, <, >$)

Способы решения:

- 1) сведение к системе линейных неравенств;
- 2) с помощью графика квадратичной функции;
- 3) метод интервалов.

Сведение к системе линейных неравенств (1 способ)

Алгоритм:

- 1) разложить квадратный многочлен на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- 2) составить и решить две системы;

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

- 3) объединить решения обеих систем.

Пример 4. Решите неравенство $x^2 + x - 20 \geq 0$.

$$x^2 + x - 20 \geq 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = -5$$

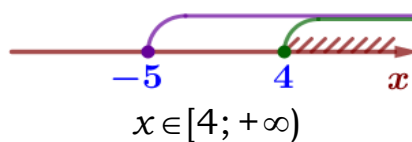
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = 4$$

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

$$(x + 5)(x - 4) \geq 0$$

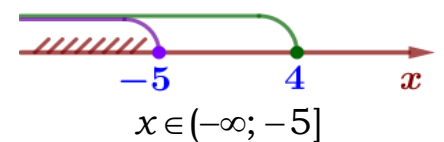
$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + 5 \leq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$

Пример 5. Решите неравенство $(x + 10)(x - 2) < 0$.

$$(x + 10)(x - 2) < 0$$

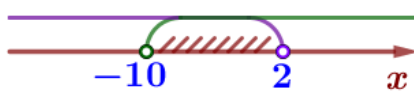
$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

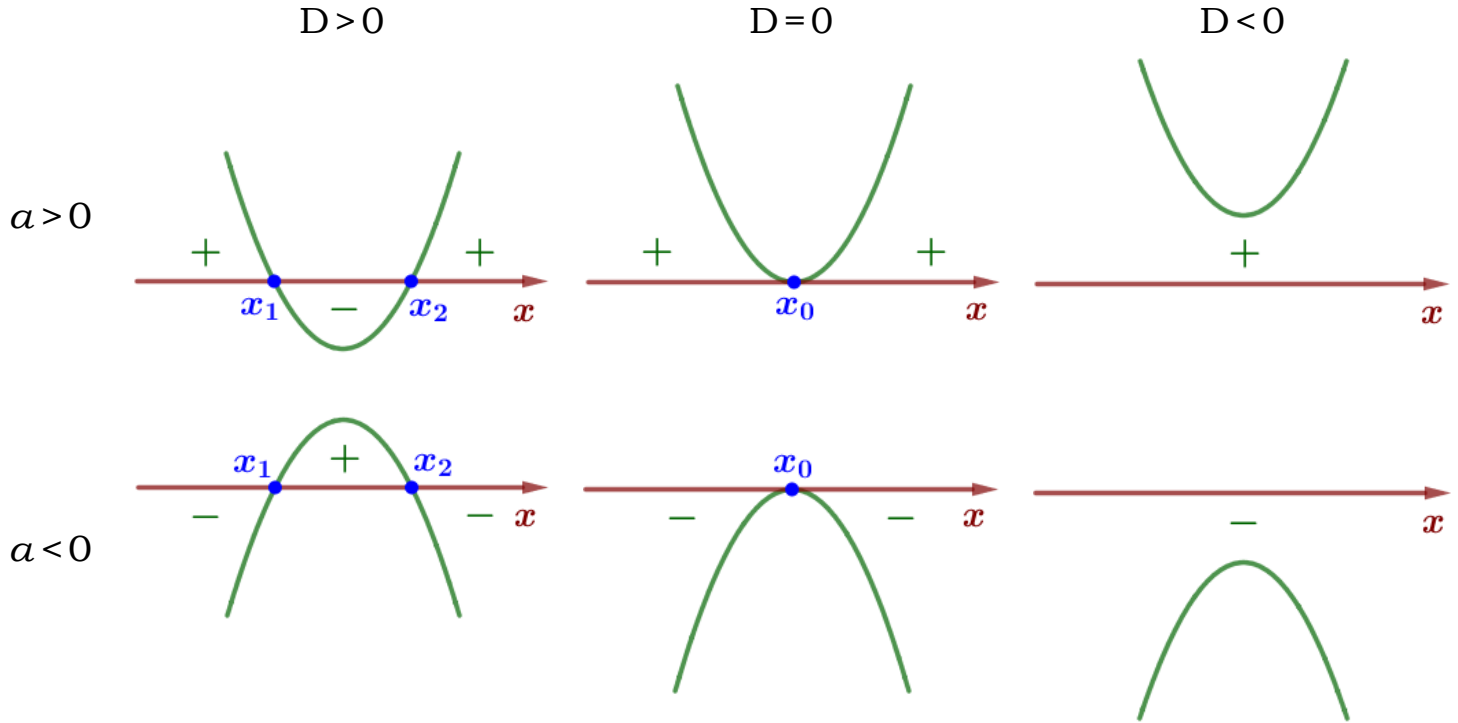


Ответ: $x \in (-10; 2)$

С помощью графика квадратичной функции (2 способ)

Алгоритм:

- 1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;
- 2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;
- 3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.



Пример 6. Решите неравенство $x^2+12x+32 \leq 0$.

$$x^2+12x+32 \leq 0$$

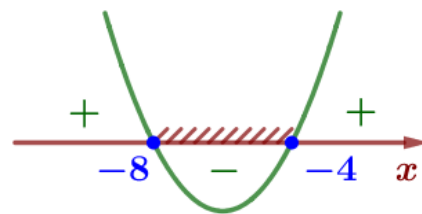
$$x^2+12x+32=0$$

$$D=b^2-4ac=12^2-4 \cdot 1 \cdot 32=16$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -4$$

$a=1 > 0$ ветви вверх



Ответ: $x \in [-8; -4]$

Пример 7. Решите неравенство $7x-x^2 < 0$.

$$7x-x^2 < 0$$

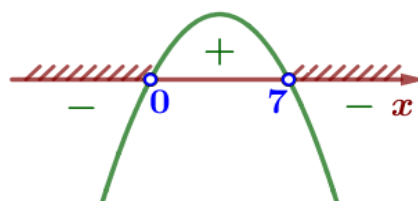
$$7x-x^2=0$$

$$x(7-x)=0$$

$$x=0 \quad 7-x=0$$

$$x=7$$

$a=-1 < 0$ ветви вниз



Ответ:

$x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$

Пример 8.

Решите неравенство $x^2+100<0$.

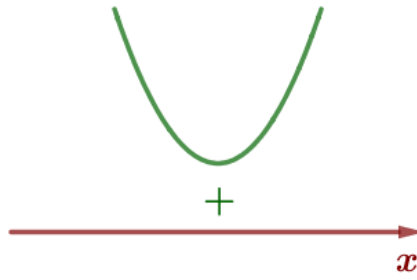
$$x^2+100<0$$

$$x^2+100=0$$

$$x^2=-100$$

корней нет

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ:

неравенство не имеет решений

Метод интервалов (3 способ)

Алгоритм:

1) найти нули функции $y=ax^2+bx+c$, решив квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0;$$

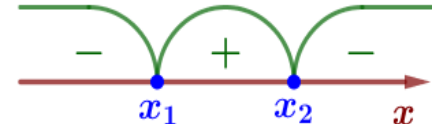
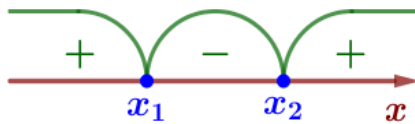
2) отметить положение нулей на оси Ox ;

3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

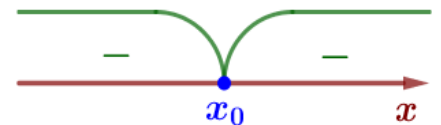
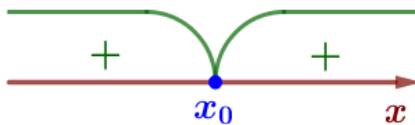
А. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,

В. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

$D > 0$ (2 корня)
знаки чередуются



$D = 0$ (1 корень)
знаки совпадают



$D < 0$ (нет корней)
функция сохраняет знак на всей числовой оси



4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Пример 9. Решите неравенство $4x^2 \geq 9$.

$$4x^2 \geq 9$$

$$4x^2 - 9 \geq 0$$

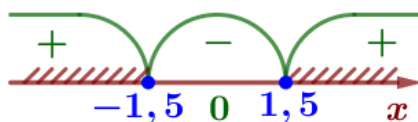
$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(2x-3)(2x+3) = 0$$

$$2x-3=0 \quad 2x+3=0$$

$$2x=3 \quad 2x=-3$$

$$x=1,5 \quad x=-1,5$$



при $x=0$

$$4x^2 - 9 = 4 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0 \Rightarrow$$

на интервале $(-1,5; 1,5)$

знак "-"

Ответ: $x \in (-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$

Пример 10. Решите неравенство $x^2 - 2x + 15 < 0$.

$$x^2 - 2x + 15 < 0$$

$$x^2 - 2x + 15 = 0$$

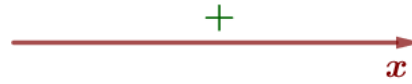
$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$$

корней нет

при $x = 0$ $x^2 - 2x + 15 = 0^2 - 2 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: неравенство не имеет решений

Пример 11. Решите неравенство $x^2 + 12 > 0$.

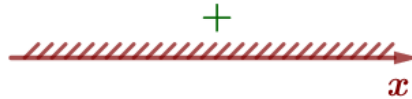
$$x^2 + 12 = 0$$

$$x^2 = -12$$

корней нет

при $x = 0$ $x^2 + 12 = 0^2 + 12 = 12 > 0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: $x \in \mathbb{R}$, то есть x – любое число

Пример 12. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:



1) $x^2 - 81 < 0$

2) $x^2 - 81 > 0$

3) $x^2 - 9x < 0$

4) $x^2 - 9x > 0$

Решим неравенство №1:

$$x^2 - 81 < 0$$

$$x^2 - 81 = 0$$

$$(x - 9)(x + 9) = 0$$

$$x - 9 = 0 \quad x + 9 = 0$$

$$x = 9 \quad x = -9$$

Корни **не** совпадают с данными рисунка.

Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$$x^2 - 9x < 0$$

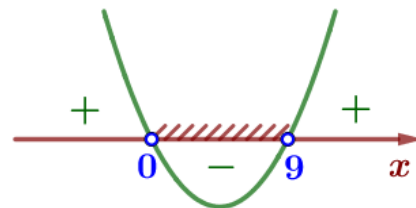
$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

$a = 1 > 0$ ветви вверх



Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3