

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 1. ФИПИ

Задание 1. Сократите дробь:

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1) $\frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$; | 3) $\frac{18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n-2}}$; | 5) $\frac{20^n}{2^{2n-2} \cdot 5^{n-2}}$; | 7) $\frac{75^n}{5^{2n-1} \cdot 3^{n-2}}$; |
| 2) $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-3}}$; | 4) $\frac{48^n}{4^{2n-1} \cdot 3^{n-3}}$; | 6) $\frac{12^n}{2^{2n-3} \cdot 3^{n-1}}$; | 8) $\frac{36^n}{3^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$. |

Задание 2. Найдите значение выражения при данном условии:

- | | |
|--|--|
| 1) $31a - 4b + 55$, если $\frac{a - 4b + 7}{4a - b + 7} = 8$; | 5) $28a - 7b + 40$, если $\frac{2a - 5b + 7}{5a - 2b + 7} = 6$; |
| 2) $19a - 7b + 12$, если $\frac{5a - 8b + 2}{8a - 5b + 2} = 3$; | 6) $39a - 15b + 25$, если $\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$; |
| 3) $41a - 11b + 15$, если $\frac{4a - 9b + 3}{9a - 4b + 3} = 5$; | 7) $11a - 7b + 21$, если $\frac{4a - 5b + 6}{5a - 4b + 6} = 3$; |
| 4) $25a - 5b + 22$, если $\frac{3a - 7b + 6}{7a - 3b + 6} = 4$; | 8) $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$. |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; | 9) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$; |
| 2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; | 10) $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$; |
| 3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$; | 11) $x^3 + 7x^2 = 4x + 28$; |
| 4) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$; | 12) $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$; |
| 5) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$; | 13) $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$; |
| 6) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$; | 14) $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$; |
| 7) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; | 15) $x^3 + 6x^2 = 4x + 24$; |
| 8) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$; | 16) $x^3 + x^2 = 16x + 16$. |

Задание 4. Решите уравнение:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1) $x^2 - 2x + \sqrt{4-x} = \sqrt{4-x} + 15$; | 9) $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$; |
| 2) $x^2 - 3x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 10$; | 10) $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$; |
| 3) $x^2 - 2x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 35$; | 11) $x(x^2 + 2x + 1) = 6(x + 1)$; |
| 4) $x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18$; | 12) $x(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)$; |
| 5) $x^2 - 2x + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 3$; | 13) $x(x^2 + 4x + 4) = 8(x + 2)$; |
| 6) $x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7$; | 14) $x(x^2 + 6x + 9) = 10(x + 3)$; |
| 7) $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$; | 15) $x(x^2 + 8x + 16) = 12(x + 4)$; |
| 8) $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$; | 16) $x(x^2 + 10x + 25) = 6(x + 5)$. |

Задание 5. Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(x-1)(x^2+8x+16)=6(x+4)$; | 9) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0$; |
| 2) $(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2)$; | 10) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0$; |
| 3) $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3)$; | 11) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0$; |
| 4) $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$; | 12) $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0$; |
| 5) $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3)$; | 13) $(x^2-25)^2+(x^2+2x-15)^2=0$; |
| 6) $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$; | 14) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$; |
| 7) $(x-3)(x^2+10x+25)=9(x+5)$; | 15) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$; |
| 8) $(x-4)(x^2+2x+1)=6(x+1)$; | 16) $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0$. |

Задание 6. Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$; | 9) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-6=0$; |
| 2) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$; | 10) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$; |
| 3) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0$; | 11) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{x-3}-4=0$; |
| 4) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$; | 12) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$; |
| 5) $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$; | 13) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}-14=0$; |
| 6) $\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}-14=0$; | 14) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-3=0$; |
| 7) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-12=0$; | 15) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{6}{x-3}-16=0$; |
| 8) $\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}-7=0$; | 16) $\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{1}{x-4}-20=0$. |

Задание 7. Решите уравнение:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0$; | 5) $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$; |
| 2) $(x-2)^4-(x-2)^2-6=0$; | 6) $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$; |
| 3) $(x+3)^4-2(x+3)^2-15=0$; | 7) $(x+1)^4+(x+1)^2-6=0$; |
| 4) $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0$; | 8) $(x-2)^4+(x-2)^2-12=0$. |

Задание 8. Решите уравнение:

- 1) $x^4 = (x-20)^2$; 3) $x^4 = (4x-5)^2$; 5) $x^4 = (x-6)^2$; 7) $x^4 = (2x-8)^2$;
 2) $x^4 = (3x-10)^2$; 4) $x^4 = (2x-15)^2$; 6) $x^4 = (3x-4)^2$; 8) $x^4 = (5x-14)^2$.

Задание 9. Решите систему уравнений:

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y; \end{cases}$ | 9) $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$ | 17) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31, \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y, \\ 9x - 14 = y; \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases}$ | 18) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50, \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y; \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$ | 19) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25, \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x; \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y; \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2; \end{cases}$ | 20) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61, \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y; \end{cases}$ | 13) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 5; \end{cases}$ | 21) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x; \end{cases}$ |
| 6) $\begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y; \end{cases}$ | 14) $\begin{cases} 3x^2 + y = 9, \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$ | 22) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21, \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x; \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y; \end{cases}$ | 15) $\begin{cases} 6x^2 + y = 14, \\ 12x^2 - y = 4; \end{cases}$ | 23) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24, \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x; \end{cases}$ |
| 8) $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y; \end{cases}$ | 16) $\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1; \end{cases}$ | 24) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x. \end{cases}$ |

Задание 10. Решите неравенство:

- | | | |
|---------------------------------|---|--|
| 1) $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1)$; | 7) $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$; | 11) $\frac{-14}{(x-5)^2 - 2} \geq 0$; |
| 2) $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$; | 8) $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; | 12) $\frac{-16}{(x+2)^2 - 5} \geq 0$; |
| 3) $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$; | | 13) $\frac{-13}{(x-4)^2 - 6} \geq 0$; |
| 4) $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$; | | 14) $\frac{-15}{(x+1)^2 - 3} \geq 0$; |
| 5) $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$; | 9) $\frac{-10}{(x-3)^2 - 5} \geq 0$; | 15) $\frac{-11}{(x-2)^2 - 3} \geq 0$; |
| 6) $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4)$; | 10) $\frac{-18}{(x+4)^2 - 10} \geq 0$; | 16) $\frac{-17}{(x+3)^2 - 7} \geq 0$. |

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

Задание 1. Сократите дробь:

$$1) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right);$$

$$4) \frac{p(a)}{p(6-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(6-c)}{c-3};$$

$$2) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right)\left(5b + \frac{1}{b}\right);$$

$$5) \frac{p(a)}{p(8-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(8-c)}{c-4};$$

$$3) \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{10}{b}\right)\left(10b + \frac{1}{b}\right);$$

$$6) \frac{p(a)}{p(20-a)}, \text{ если } p(c) = \frac{c(20-c)}{c-10}.$$

Задание 2. Решите уравнение:

$$1) (2x-2)^2(x-2) = (2x-2)(x-2)^2;$$

$$9) (x+5)^3 = 25(x+5);$$

$$2) (x-8)(4x-8)^2 = (x-8)^2(4x-8);$$

$$10) (x+2)^3 = 4(x+2);$$

$$3) (2x-5)^2(x-5) = (2x-5)(x-5)^2;$$

$$11) (x+4)^3 = 16(x+4);$$

$$4) (x+3)(4x+2)^2 = (4x+2)(x+3)^2;$$

$$12) (x+9)^3 = 81(x+9);$$

$$5) (x-2)(x-3)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5);$$

$$13) 3x^2 - 7x + 29 = (x+4)^2;$$

$$6) (x-7)(x-4)(x-6) = (x-7)(x-3)(x-6);$$

$$14) 4x^2 - 9x + 12 = (x+6)^2;$$

$$7) (x+2)(x-13)(x-4) = (x+2)(x-5)(x-13);$$

$$15) -3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2;$$

$$8) (x-4)(x+5)(x+7) = (x+5)(x+7)(x-2);$$

$$16) -4x^2 - 7x + 12 = (x-2)^2.$$

Задание 3. Решите уравнение:

$$1) x^6 = (6x-5)^3;$$

$$4) x^3 = 3x^2 + 4x;$$

$$7) (x-2)^2(x-3) = 20(x-2);$$

$$2) x^6 = (7x-12)^3;$$

$$5) x^3 = 2x^2 + 8x;$$

$$8) (x-2)^2(x-3) = 12(x-2).$$

$$3) x^6 = (6x-8)^3;$$

$$6) x^3 = 4x^2 + 5x;$$

Задание 4. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} (x+6y)^2 = 7y, \\ (x+6y)^2 = 7x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (2x+6y)^2 = 8y, \\ (2x+6y)^2 = 8x; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} (2x+y)^2 = 3y, \\ (2x+y)^2 = 3x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y-2x = 6, \\ x^2 - xy + y^2 = 12; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x-y = 10, \\ x^2 + xy - y^2 = 20; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y-x = -5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17. \end{cases}$$

Задание 5. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ 6x^2 - y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$$

Задание 6. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x - y = -8, \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = -1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x^2 = 2y + 3, \\ x^2 + 6 = 2y + y^2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + y = 1, \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{5} = 2; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} (x-8)(y-9) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-13} = 4; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x^2 = 11y + 3, \\ x^2 + 1 = 11y + y^2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - y = 15, \\ \frac{x+6}{2} - \frac{y}{3} = 6; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} (x-6)(y-7) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-10} = 3; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x^2 = 10y + 6, \\ x^2 + 3 = 10y + y^2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y = -8, \\ \frac{x}{4} + \frac{y-2}{3} = -1; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} (x-4)(y-7) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-9} = 2; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x^2 = 17y + 2, \\ x^2 + 2 = 17y + y^2. \end{cases}$$

Задание 7. Решите неравенство:

$$1) (x-3)(2x+3) < -7; \quad 5) (4x-6)^2 \geq (6x-4)^2;$$

$$2) (x-1)(3x-5) < 1; \quad 6) (5x-8)^2 \geq (8x-5)^2;$$

$$3) (2x+1)(x-1) > 9; \quad 7) (3x-5)^2 \geq (5x-3)^2;$$

$$4) (3x-2)(x+4) > -11; \quad 8) (2x-7)^2 \geq (7x-2)^2.$$

Задание 8. Решите неравенство:

$$1) x^2(-x^2 - 64) \leq 64(-x^2 - 64); \quad 3) x^2(-x^2 - 25) \leq 25(-x^2 - 25);$$

$$2) x^2(-x^2 - 49) \leq 49(-x^2 - 49); \quad 4) x^2(-x^2 - 9) \leq 9(-x^2 - 9).$$

Задание 9. Решите неравенство:

$$1) \frac{-14}{x^2 + 2x - 15} \leq 0; \quad 5) \frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4};$$

$$2) \frac{-19}{x^2 + x - 12} \leq 0; \quad 6) \frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3};$$

$$3) \frac{-25}{x^2 + 9x - 10} \leq 0; \quad 7) \frac{x^2}{3} \geq \frac{8x-9}{5};$$

$$4) \frac{-23}{x^2 + 6x - 16} \leq 0; \quad 8) \frac{x^2}{2} < \frac{11x-4}{5}.$$

Задание 10. Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (6x+2) - 6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4(9x+3) - 9(4x+3) > 3x, \\ (x-2)(x+9) < 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (5x+4) - 5(x+4) > 2x, \\ (x-3)(x+10) < 0. \end{cases}$$

Задание 11. Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{3-x}{1+(5-x)^2} \geq 0, \\ 8-7x \leq 12-3x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{7-7x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2-2x}{8+(2-6x)^2} \geq 0, \\ 5-9x \leq 37-5x. \end{cases}$$

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 3. Типовые экзаменационные варианты

Задание 1. Решите уравнение:

$$1) x^6 = -(4-5x)^3;$$

$$3) x^6 = -(5x+6)^3;$$

$$2) x^6 = -(10-7x)^3;$$

$$4) x^6 = -(7x+6)^3.$$

Задание 2. Решите неравенство:

$$1) -\frac{12}{x^2-8x-9} \geq 0;$$

$$3) \frac{-23}{18+3x-x^2} \leq 0;$$

$$2) -\frac{29}{x^2-6x-16} \geq 0;$$

$$4) \frac{-19}{20+x-x^2} \leq 0.$$

Задание 3. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = -6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ xy = 18; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ xy = -5. \end{cases}$$