Конспект

На основе УМК «Математика 6 класс» авторы:
А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир

2022 г.

Глава 1. Натуральные числа

§ 1. Ряд натуральных чисел

Определение

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и т.д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**. Записанные в порядке возрастания, они образуют **натуральный ряд**.

§ 2. Цифры. Десятичная запись натуральных чисел

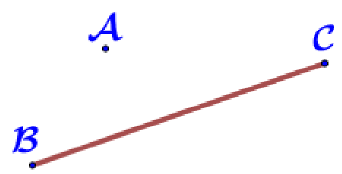
Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

классы	миллиарды			миллионы			тысячи			единицы		
число		**1**	**7**	**0**	**2**	**5**	**5**	**4**	**3**	**6**	**0**	**7**
разряды	сотни миллиардов	десятки миллиардов	единицы миллиардов	сотни миллионов	десятки миллионов	единицы миллионов	сотни тысяч	десятки тысяч	единицы тысяч	сотни	десятки	единицы

Представление числа в виде суммы разрядных слагаемых:

$7\,405 = 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5$ $\qquad$ $25\,680 = 2 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10$

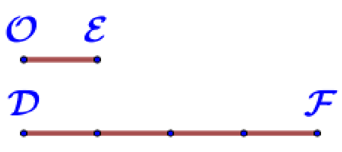
§ 3. Отрезок. Длина отрезка



Геометрические фигуры: точка, отрезок…

Точки: A, B, C.

Отрезок: BC (или CB). **Концы** отрезка: B и C.

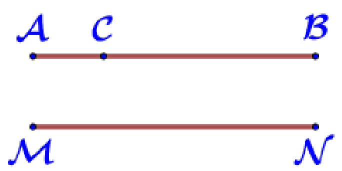


DF = 4 см

OE – **единичный отрезок**, равный 1 см (1 мм, 1 м, …)

Измерить отрезок – подсчитать, сколько единичных отрезков в нём помещается.

Расстояние между точками D и F – длина отрезка DF.



AB = AC + CB

MN = AB

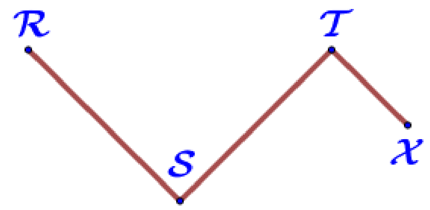
Свойство длины отрезка

Если на отрезке AB отметить точку C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB.

Определение

Два отрезка называют **равными**, если они совпадают при наложении.

Равные отрезки имеют равные длины.



Определение

Ломаная [линия] – геометрическая фигура, состоящая из отрезков, последовательно соединенных своими концами.

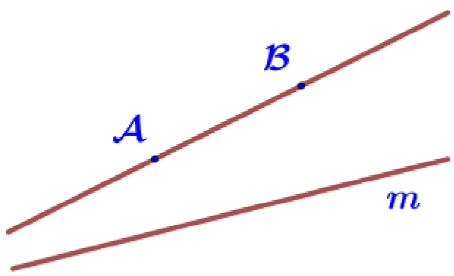
Точки R, S, T, X – **вершины** ломаной RSTX, точки R и X – **концы** ломаной, отрезки RS, ST и TX – **звенья**.

Длина ломаной – сумма длин её звеньев. Ломаные бывают **замкнутые** (концы совпадают) и **незамкнутые** (концы не совпадают).

§ 4. Плоскость. Прямая. Луч

Определение **Плоскость** – это «ровная поверхность».

Плоскость бесконечна, модель плоскости: поверхность стола, стекла, воды, натянутой ткани, альбомного или тетрадного листа и т.д.



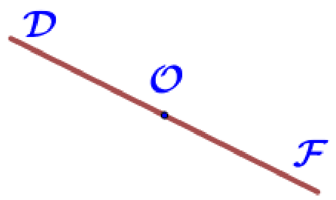
Прямая [линия] бесконечна.

Модель **прямой** [линии]: натянутая нить, линия сгиба листа.

Свойство прямой

Через две точки проходит только одна прямая.

Прямые: AB (или BA) и *m*.



Точка разбивает прямую [линию] на **два луча**.

Лучи: OD и OF; O – начало лучей. Конца у луча нет.

Определение

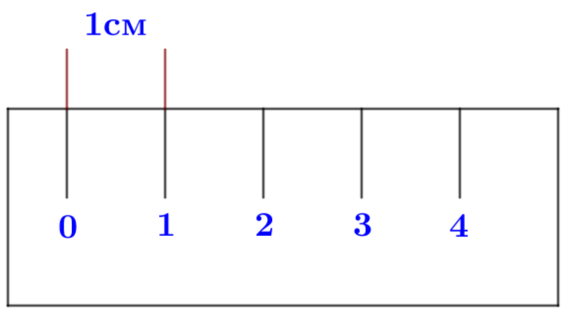
Лучи, на которые точка разбивает прямую [линию], называются **дополнительными**.

§ 5. Шкала. Координатный луч

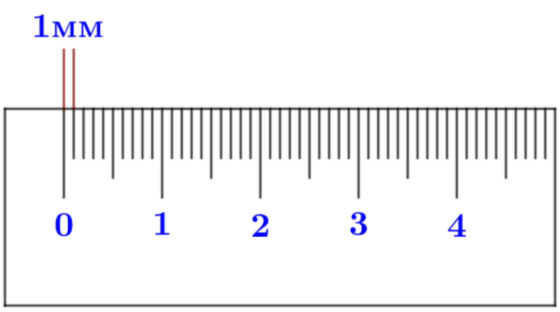
На именительные приборы наносятся **штрихи**, полученные части [расстояние между штрихами] называют **делениями**. Все деления образуют **шкалу**.

Примеры именительных приборов: линейка, термометр, циферблат, ...

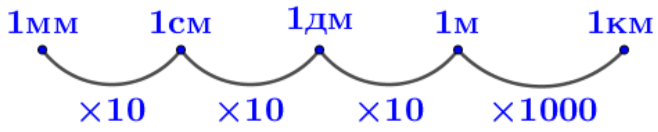
Шкала **с ценой деления 1 см**:



Шкала **с ценой деления 1 мм**:



Единицы длины



миллиметр

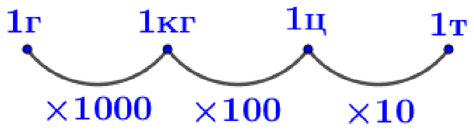
сантиметр 1 см = 10 мм

дециметр 1 дм = 10 см = 100 мм

метр 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм

километр 1 км = 1000 м

Единицы массы



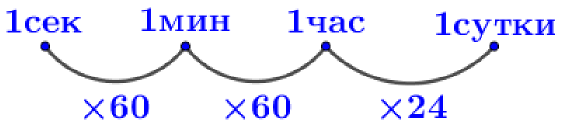
грамм

килограмм 1 кг = 1000 г

центнер 1 ц = 100 кг = 100 000 г

тонна 1 т = 10 ц = 1000 кг = 1 000 000 г

Единицы времени

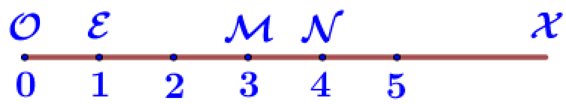


секунда

минута 1 мин = 60 сек

час 1 час = 60 мин = 3 600 сек

сутки 1 сутки = 24 часа = 1 440 мин



OX – **координатный луч**,

O – **начало отсчета**,

OE – **единичный отрезок**.

Определение

Числа 0, 1, 3, 4…, соответствующие точкам O, E, M, N, …, называют **координатами** этих точек. O(0), E(1), M(3), N(4) и т.д.

§ 6. Сравнение натуральных чисел

$0<14$	Результат сравнения двух чисел записывают в виде **неравенства**, применяя знаки **<** (меньше) и **>** (больше).
$0<8<12$	При сравнении трех чисел записывают **двойное неравенство**.

Число 0 меньше любого натурального числа.

Из двух натуральных чисел, имеющих **разное количество** цифр, большим является то, у которого **количество** цифр **больше**.

Из двух натуральных чисел с **одинаковым количеством** цифр большим является то, у которого **больше первая** (при чтении слева направо) **из** неодинаковых **цифр**.

На координатном луче точка с меньшей координатой расположена левее точки с большей координатой.

Глава 2. Сложение и вычитание натуральных чисел

§ 7. Сложение натуральных чисел. Свойства сложения

Слагаемое	**+**	**Слагаемое**	**=**	**Сумма**

Свойства сложения

переместительное:

$a+b=b+a$

$8+10=10+8=18$

От перестановки слагаемых сумма не меняется.

сочетательное:

$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(7+5)+15=7+(5+15)=27$

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего числа.

$18+9+2+1=(18+2)+(9+1)$

При сложении нескольких чисел слагаемые можно менять местами и заключать их в скобки, тем самым определяя порядок действий.

свойство нуля:

$0+a=a+0=a$

Если одно из двух слагаемых равно нулю, то сумма равна другому слагаемому.

§ 8. Вычитание натуральных чисел. Свойства вычитания

Уменьшаемое	**–**	**Вычитаемое**	**=**	**Разность**

Свойства вычитания

вычитание суммы из числа:

$a-(b+c)=a-b-c$

$a-(b+c)=a-c-b$

Чтобы из числа вычесть сумму двух слагаемых, можно из этого числа вычесть одно из слагаемых и потом из результата вычесть другое слагаемое.

Примеры

$100-(20+50)=100-20-50=30$ $100-(20+50)=100-50-20=30$

вычитание числа из суммы:

$(a+b)-c=(a-c)+b$

$(a+b)-c=(b-c)+a$

Чтобы из суммы двух слагаемых вычесть число, можно вычесть это число из одного из слагаемых (если это слагаемое больше или равно вычитаемому) и потом к результату прибавить другое слагаемое.

Примеры

$(10+70)-65=(70-65)+10=15$ $(40+50)-25=(40-25)+50=65$

свойства нуля: $a-0=a$ и $a-a=0$ $9-0=9$ $13-13=0$

§ 9. Числовые и буквенные выражения. Формулы

Определения

$27-(25+13\cdot 11)$ — **Числовое выражение** – выражение, составленное из чисел, знаков арифметических действий и скобок.

$(34a+19):a$ — **Буквенное выражение** – выражение, составленное из чисел, *букв*, знаков арифметических действий и скобок.

Формулы:

периметр прямоугольника:	$P=2a+2b$	a и b – стороны прямоугольника
периметр квадрата:	$P=4a$	a – сторона квадрата
путь, скорость, время	$S=vt \quad v=\dfrac{S}{t} \quad t=\dfrac{S}{v}$	S – пройденный путь, v – скорость движения, t – время, за которое пройден путь

§ 10. Уравнение

Определения

Уравнение – равенство, содержащее букву, значение которой надо найти.

Корень уравнения – число, которое при подстановке вместо буквы обращает уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или убедиться, что их вообще нет.

Слагаемое	**+**	**Слагаемое**	**=**	**Сумма**
Неизвестное слагаемое	=	Сумма	–	Известное слагаемое

правило:

$x+a=b$

$x=b-a$

пример:

$x+12=18$

$x=18-12$

$x=6$

Уменьшаемое	**–**	**Вычитаемое**	**=**	**Разность**
Неизвестное уменьшаемое	=	Вычитаемое	+	Разность
Неизвестное вычитаемое	=	Уменьшаемое	–	Разность

правило:

$x-a=b$

$x=a+b$

пример:

$x-30=54$

$x=30+54$

$x=84$

$a-x=b$

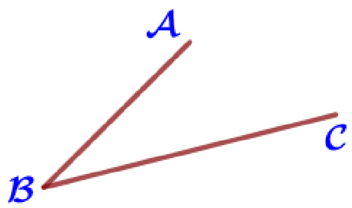
$x=a-b$

$47-x=11$

$x=47-11$

$x=36$

§ 11. Угол. Обозначение углов

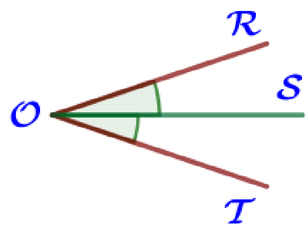


Определение

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, имеющими общее начало.

Обозначение: $\angle B$, $\angle ABC$ или $\angle CBA$.

Лучи BA и BC – **стороны** угла, точка B – **вершина**.



Определение

Два угла называются **равными**, если они совпадают при наложении.

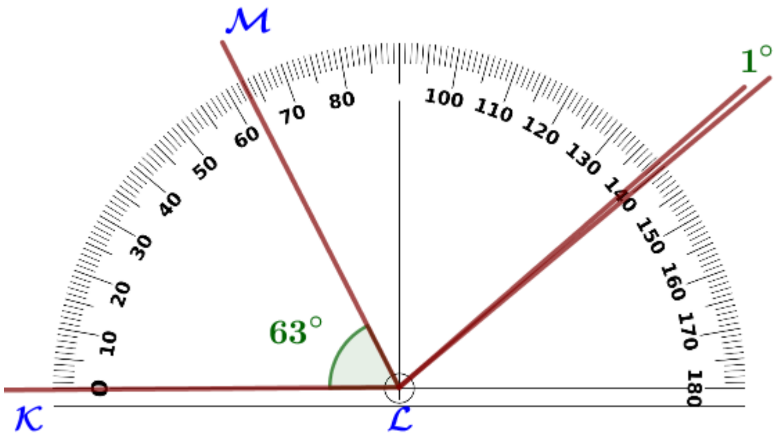
$$\angle ROS = \angle SOT$$

OS – биссектриса угла ROT.

Определение

Биссектриса угла – это луч, который делит угол на два равных, то есть пополам.

§ 12. Виды углов. Измерение углов



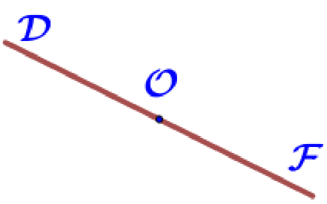
транспортир

1° (градус) – единичный угол.

Измерить угол – подсчитать, сколько единичных углов в нём помещается.

$$\angle KLM = 63°$$

Равные углы имеют равные градусные меры.



Определение

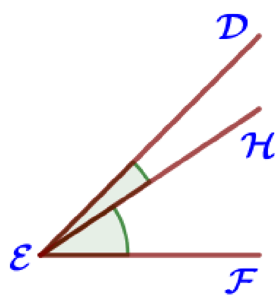
Развернутый угол – угол, стороны которого образуют прямую. Угол DOF – развернутый.

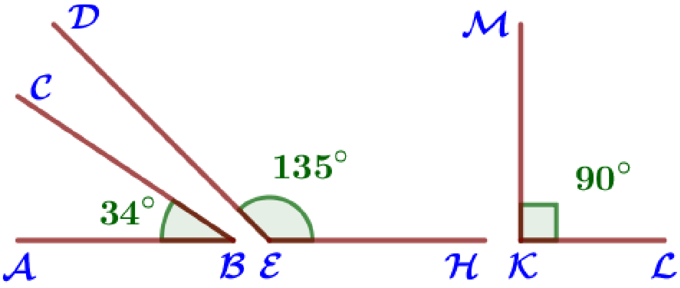
Градусная мера (величина) развернутого угла – 180°.

Свойство величины угла

Если между сторонами угла DEF провести луч EH, то градусная мера угла DEF равна сумме градусных мер углов DEH и HEF, то есть

$$\angle DEF = \angle DEH + \angle HEF.$$





Определения

Острый угол – угол, градусная мера которого меньше 90°.

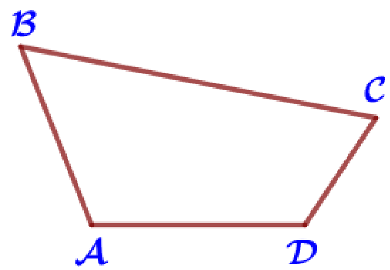
Прямой угол – угол, градусная мера которого равна 90°.

Тупой угол – угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°.

§ 13. Многоугольники. Равные фигуры

Определение

Многоугольник – геометрическая фигура, образованная замкнутой ломаной линией без самопересечений.



Вершины ломаной – *вершины* многоугольника, звенья ломаной – *стороны* многоугольника.

Многоугольники: треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т.д.

Четырехугольник ABCD: вершины A, B, C, D и стороны AB, BC, CD, DA.

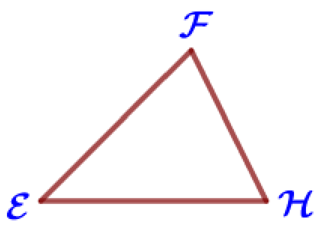
Определения

Два многоугольника называют **равными**, если они совпадают при наложении. Две фигуры называют **равными**, если они совпадают при наложении.

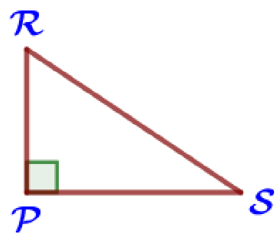
§ 14. Треугольник и его виды

Классификация треугольников по виду углов

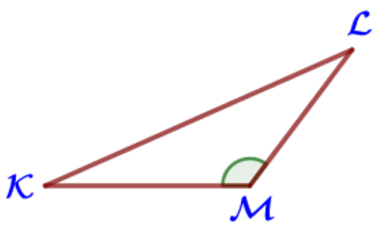
Определения



Если все углы треугольника острые, то его называют **остроугольным.**



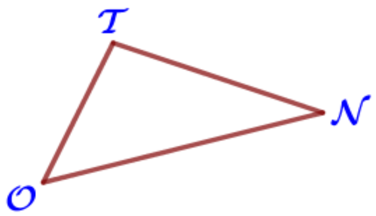
Если один из углов треугольника прямой, то его называют **прямоугольным**.



Если один из углов треугольника тупой, то его называют **тупоугольным**.

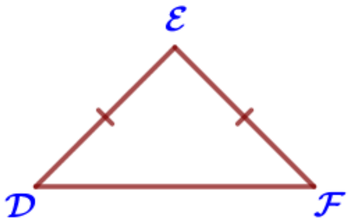
Классификация треугольников по количеству равных сторон

Определения



$P=a+b+c$

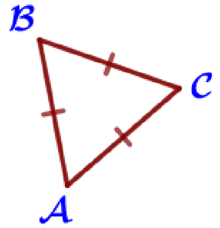
Треугольник, у которого три стороны имеют различную длину, называют **разносторонним**.



$DE=EF=a$

$P=2a+b$

Если две стороны треугольника равны, то его называют **равнобедренным**.



$AB=BC=CA=a$

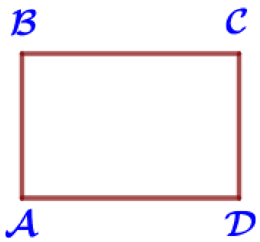
$P=3a$

Если три стороны треугольника равны, то его называют **равносторонним**.

<u>§ 15. Прямоугольник. Ось симметрии фигуры</u>

Определение

Прямоугольник – четырехугольник, у которого все углы прямые.



$P=2a+2b$

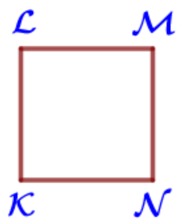
$AD=BC=a$ – **длина**, $AB=CD=b$ – **ширина**.

AB и BC, BC и CD – пары **соседних** сторон.

AD и BC, AB и CD – две пары **противолежащих** сторон.

Свойство прямоугольника

Противолежащие стороны прямоугольника равны.

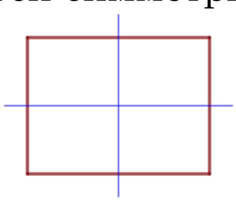


$P=4a$

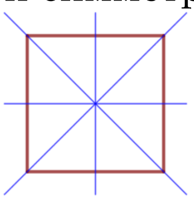
Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны.

$KL=LM=MN=KN=a$

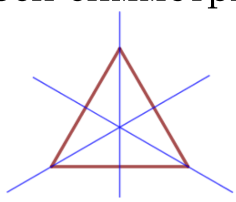
Прямоугольник
2 оси симметрии.



Квадрат
4 оси симметрии.



Равносторонний треугольник
3 оси симметрии.



Глава 3. Умножение и деление натуральных чисел

§ 16. Умножение. Переместительное свойство умножения

Определение

Произведением числа *a* **на натуральное число** ***b***, не равное 1, называют сумму, состоящую из *b* слагаемых, каждое из которых равно *a.*

Множитель	·	**Множитель**	=	**Произведение**

Свойства умножения

свойство единицы:

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

$1 \cdot 17 = 17 \cdot 1 = 17$

Если один из двух множителей равен 1, то произведение равно другому множителю.

свойство нуля:

$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 21 = 21 \cdot 0 = 0$

Если один из множителей равен нулю, то произведение равно нулю.
Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

переместительное:

$ab = ba$

$5 \cdot 11 = 11 \cdot 5 = 55$

От перестановки множителей произведение не меняется.

§ 17. Сочетательное и распределительное свойства умножения

Множитель	·	**Множитель**	=	**Произведение**

Свойства умножения

сочетательное:

$(ab)c = a(bc)$

$(3 \cdot 2) \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 30$

Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел.

$5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = (6 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 5)$

При умножении нескольких чисел множители можно менять местами и заключать их в скобки, тем самым определяя порядок вычислений.

распределительное /относительно сложения/:

$a(b+c) = ab + ac$

$ab + ac = a(b+c)$

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

распределительное /относительно вычитания/:

$a(b-c) = ab - ac$

$ab - ac = a(b-c)$

если $b > c$ или $b = c$

Примеры

Раскрытие скобок:

$4(b+3) = 4b + 4 \cdot 3 = 4b + 12$

$9(x-y) = 9x - 9y$

Упрощение выражения:

$13a + 2a = a(13+2) = a \cdot 15 = 15a$

$7x - x = x(7-1) = x \cdot 6 = 6x$

§ 18. Деление

Делимое	**:**	**Делитель**	**=**	**Частное**

На нуль делить нельзя!

Свойства

$0:a=0$ $a:1=a$ $a:a=1$

Решение уравнений

Множитель	**·**	**Множитель**	**=**	**Произведение**
Неизвестный множитель	=	Произведение	:	Известный множитель

правило: $a\cdot x=b$, $x=b:a$

пример: $9\cdot x=810$, $x=810:9$, $x=90$

Делимое	**:**	**Делитель**	**=**	**Частное**
Неизвестное делимое	=	Делитель	·	Частное
Неизвестный делитель	=	Делимое	:	Частное

правило: $x:a=b$, $x=a\cdot b$

пример: $x:2=21$, $x=2\cdot 21$, $x=42$

$a:x=b$, $x=a:b$

$70:x=14$, $x=70:14$, $x=5$

§ 19. Деление с остатком

$20:8=2$ (ост 4)
$20=8\cdot 2+4$

$a=bq+r$

a – делимое, b – делитель,
q – неполное частное, r – остаток, $r<b$.

Чтобы найти делимое, надо делитель умножить на неполное частное и прибавить остаток.

Остаток всегда меньше делителя.

Если остаток равен нулю, то говорят, что «число a делится нацело на число b».

§ 20. Степень числа

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=8^6$ a^b

a – основание степени,
b – показатель степени

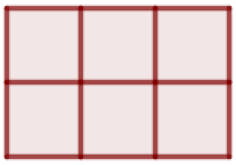
Квадрат числа $n\cdot n=n^2$ $7\cdot 7=7^2=49$ $(5ab)^2=5ab\cdot 5ab=25a^2b^2$

Куб числа $n\cdot n\cdot n=n^3$ $4\cdot 4\cdot 4=4^3=64$ $(10x)^3=10x\cdot 10x\cdot 10x=1000x^3$

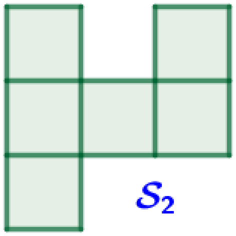
Порядок действий:
1. действия в скобках
2. возведение в степень
3. умножение и деление
4. сложение и вычитание

Возведение числа в степень – это пятое арифметическое действие.

§ 21. Площадь. Площадь прямоугольника



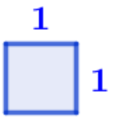
$\mathcal{S}_1$



$\mathcal{S}_2$

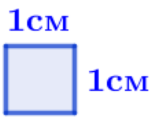
Если какую-нибудь фигуру можно разбить на p квадратов со стороной 1 см, то ее площадь равна p см^2.

$S_1 = S_2 = 6$

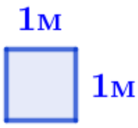


единичный квадрат

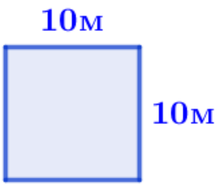
Измерить площадь фигуры – значит подсчитать, сколько единичных квадратов в ней помещаться.



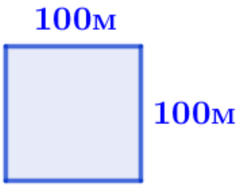
$1\text{см} \cdot 1\text{см} = 1\text{см}^2$
квадратный сантиметр



$1\text{м} \cdot 1\text{м} = 1\text{м}^2$
квадратный метр

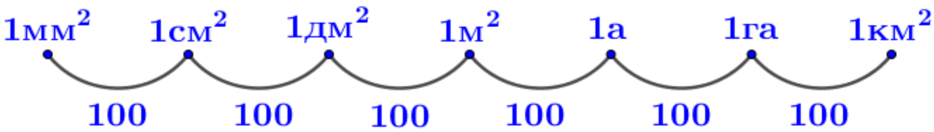


ар (сотка)
$1\text{а} = 100\text{м}^2$
$10\text{м} \cdot 10\text{м} = 100\text{м}^2$



гектар
$1\text{га} = 10\,000\text{м}^2$
$100\text{м} \cdot 100\text{м} = 10\,000\text{м}^2$

Единицы площади



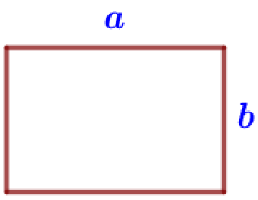
гектар $1\ \text{га} = 100\ \text{а} = 10000\ \text{м}^2$

квадратный дециметр $1\ \text{дм}^2 = 100\ \text{см}^2 = 10000\ \text{мм}^2$

квадратный метр $1\ \text{м}^2 = 10\,000\ \text{см}^2$

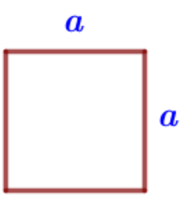
Свойства площади фигуры:

1) равные фигуры имеют равные площади;
2) площадь фигуры равна сумме площадей фигур, из которых она состоит.



площадь прямоугольника

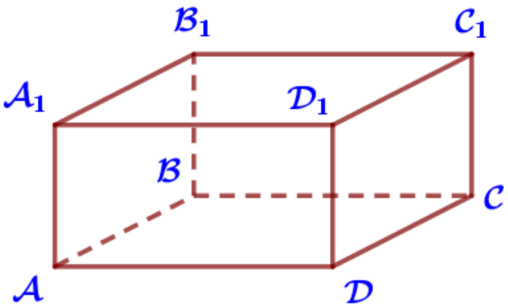
$S = ab$,
a и b – длины соседних сторон



площадь квадрата

$S = a^2$,
a – длина стороны

§ 22. Прямоугольный параллелепипед. Пирамида



Прямоугольный параллелепипед

6 граней (прямоугольники ABCD, AA_1B_1B, …)

12 ребер (отрезки AB, BB_1, C_1C, CD, …)

8 вершин (точки A_1, B, C, D_1, …)

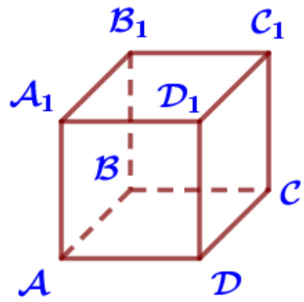
Определения

Противоположные грани – грани, у которых нет общих вершин (пример: AA_1D_1D и BB_1C_1C).

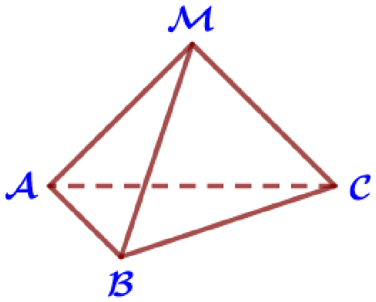
Противолежащие грани прямоугольного параллелепипеда *равны*.

Площадь поверхности параллелепипеда – сумма площадей его граней.

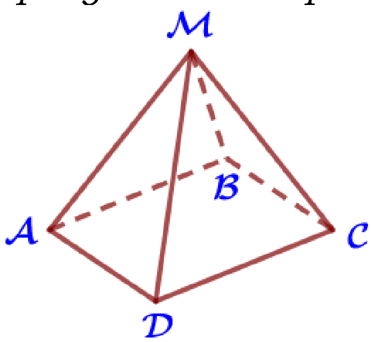
Куб – прямоугольный параллелепипед, у которого все изменения равны.



треугольная пирамида



четырехугольная пирамида



боковые грани – треугольники ABM, ABC, …

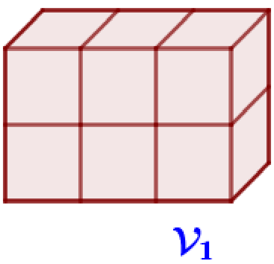
основание – треугольник ABC / четырехугольник ABCD

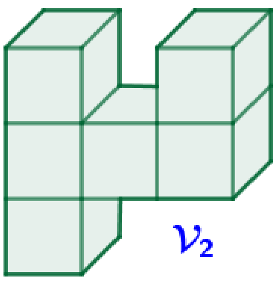
вершина – точка M

ребра основания – отрезки AB, AC, …

боковые ребра – отрезки AM, BM, …

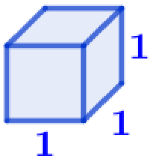
§ 23. Объем прямоугольного параллелепипеда



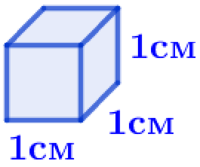


Измерить объем фигуры – значит подсчитать, сколько единичных кубов в ней помещаться.

$V_1 = V_2 = 6$

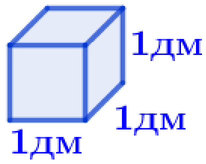


единичный куб



$1\text{см}\cdot 1\text{см}\cdot 1\text{см} = 1\text{см}^3$

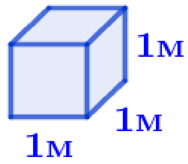
кубический сантиметр



$1\text{дм}\cdot 1\text{дм}\cdot 1\text{дм} = 1\text{дм}^3$

$1\text{дм}^3 = 1\text{л}$

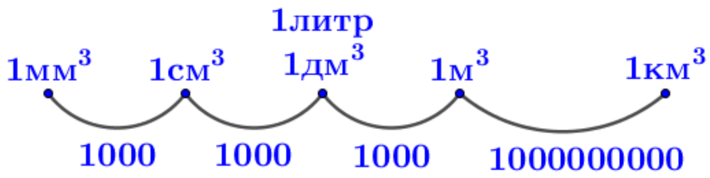
кубический дециметр (литр)



$1\text{м}\cdot 1\text{м}\cdot 1\text{м} = 1\text{м}^3$

кубический метр

Единицы объема

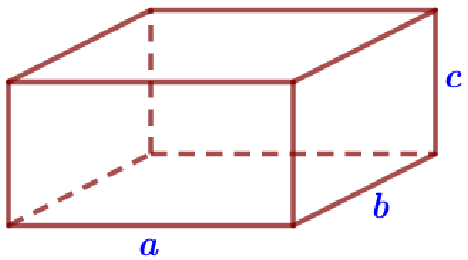


кубический сантиметр – $1\ \text{см}^3 = 1000\ \text{мм}^3$

литр – $1\ \text{л} = 1\ \text{дм}^3 = 1000\ \text{см}^3$

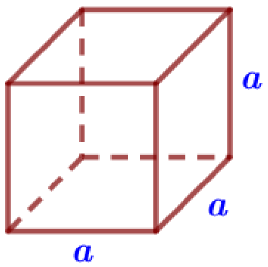
Свойства объёма фигуры

1) равные фигуры имеют равные объёмы;
2) объём фигуры равен сумме объёмов фигур, из которых она состоит.

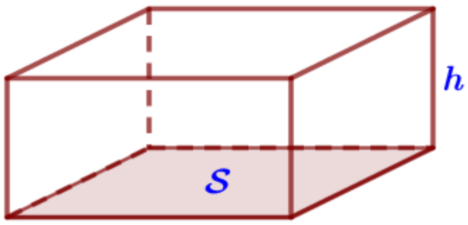


$V = abc$,
a, b и c – измерения прямоугольного параллелепипеда в одних и тех же единицах

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.



$V = a^3$,
a – длина ребра куба



$V = (ab)h = Sh$,
a и b – длины соседних сторон

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

§ 24. Комбинаторные задачи

Комбинаторные задачи – задачи, решение которых требует рассмотрения и подсчета всех возможных случаев (комбинаций).

Глава 4. Обыкновенные дроби

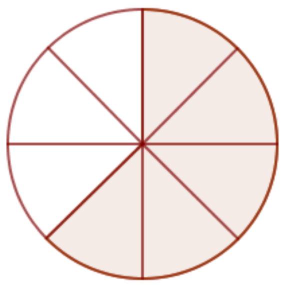
§ 25. Понятие обыкновенной дроби

Определение

Когда один предмет (арбуз, торт, лист бумаги) или единицу измерения (час, метр) делят на несколько **равных частей**, такие части называются **долями**.

Для обозначения долей используют **дробные числа**.

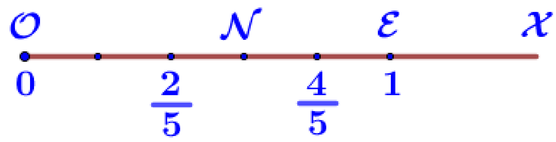
Доли: $\frac{1}{2}$ – половина $\frac{1}{3}$ – треть $\frac{1}{4}$ – четверть



$\mathbf{\frac{5}{8}}$ ← числитель дроби
← знаменатель дроби

Знаменатель дроби показывает, на сколько частей разделили нечто целое, а *числитель* – сколько таких частей взяли.

Координатный луч



§ 26. Правильные и неправильные дроби

$\frac{3}{7} < 1$

Определение

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют **правильной**.

$\frac{7}{7} = 1$

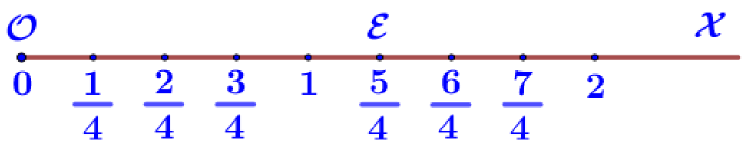
Если числитель дроби равен знаменателю, то **дробь равна единице**.

$\frac{12}{7} > 1$ $\frac{7}{7} = 1$

Определение

Дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называют **неправильной**.

Все правильные дроби меньше единицы, а неправильные – больше или равны единице.

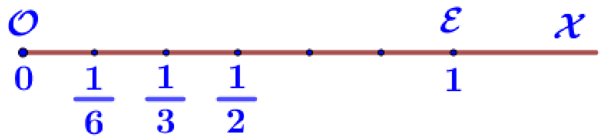


Каждая *неправильная* дробь *больше* любой *правильной* дроби.

$\frac{8}{8} > \frac{5}{7}$ $\frac{18}{17} > \frac{3}{11}$ $\frac{2}{7} < \frac{6}{5}$

На координатном луче из двух дробей *большая дробь* расположена *правее меньшей.*

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.



Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

$$\frac{6}{13}>\frac{5}{13} \qquad \frac{3}{14}>\frac{3}{17} \qquad \frac{13}{11}>\frac{11}{11} \qquad \frac{5}{5}>\frac{5}{9}$$

§ 27. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9} \qquad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Чтобы сложить две дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.

$$\frac{8}{9}-\frac{7}{9}=\frac{8-7}{9}=\frac{1}{9} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить прежним.

§ 28. Дроби и деление натуральных чисел

$$\frac{3}{4}=3:4 \qquad \frac{8}{5}=8:5$$

Черту дроби можно рассматривать как знак деления.

$$9:3=\frac{9}{3}=3$$

$$5:6=\frac{5}{6} \qquad 7:2=\frac{9}{7}$$

Результат деления двух натуральных чисел может быть натуральным или дробным.

$$6=\frac{6}{1}=\frac{12}{2}=\frac{18}{3}$$

$$1=\frac{3}{3}=\frac{7}{7}=\frac{100}{100}$$

Любое натуральное число можно записать в виде дроби с любым знаменателем.

Примеры

$$10x=3$$
$$x=3:10$$
$$x=\frac{3}{10}$$

$$\frac{88}{x+5}=8$$
$$88:(x+5)=8$$
$$x+5=88:8$$
$$x+5=11$$
$$x=11-5=6$$

§ 29. Смешанные числа

целая часть → $\mathbf{2\frac{3}{10}}$ ← дробная часть

Целая часть смешанного числа – это натуральное число.
Дробная часть смешанного числа – это *правильная* дробь.

Любую неправильную дробь, у которой числитель нацело не делится на знаменатель, можно представить в виде **смешанного числа**.

Выделение целой части

$22:5=4$ ост (2)

$\frac{22}{5}=\frac{20}{5}+\frac{2}{5}=4+\frac{2}{5}=4\frac{2}{5}$

Чтобы неправильную дробь, числитель которой нацело не делится на знаменатель, преобразовать в смешанное число, надо числитель разделить на знаменатель; полученное неполное частное записать как целую часть смешанного числа, а остаток – как числитель его дробной части.

Запись смешанного числа в виде неправильной дроби

$5\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 9+4}{9}=\frac{49}{9}$

$5\frac{4}{9}=\frac{45}{9}+\frac{4}{9}=\frac{49}{9}$

Чтобы преобразовать смешанное число в неправильную дробь, надо целую часть числа умножить на знаменатель дробной части и к полученному произведению прибавить числитель дробной части; эту сумму записать, как числитель дроби, а в ее знаменатель записать знаменатель дробной части смешанного числа.

Сложение и вычитание

$4\frac{2}{11}+10\frac{3}{11}=14\frac{5}{11}$

Чтобы сложить два смешанных числа, надо отдельно сложить их целые и дробные части.

$11\frac{7}{9}-6\frac{5}{9}=5\frac{2}{9}$

Чтобы найти разность двух смешанных чисел, надо из целой и дробной частей уменьшаемого вычесть соответственно целую и дробную части вычитаемого.

$1-\frac{13}{17}=\frac{17}{17}-\frac{13}{17}=\frac{4}{17}$

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, необходимо «подготовить» уменьшаемое, «раздробив» одну единицу на нужное количество частей.

Примеры

1) $3\frac{7}{13}+2\frac{9}{13}=5\frac{16}{13}=5+\frac{13}{13}+\frac{3}{13}=5+1+\frac{3}{13}=6\frac{3}{13}$

2) $17-1\frac{5}{12}=16\frac{12}{12}-1\frac{5}{12}=15\frac{7}{12}$

3) $9\frac{3}{7}-6\frac{4}{7}=8\frac{10}{7}-6\frac{4}{7}=2\frac{6}{7}$

Свойства сложения

1) переместительное:
$a+b=b+a$

2) сочетательное:
$(a+b)+c=a+(b+c)$

Глава 5. Десятичные дроби

§ 30. Представление о десятичных дробях

Десятичная запись дробей:

$$\frac{8}{10}=0,8 \qquad \frac{37}{100}=0,37 \qquad \frac{4}{100}=\frac{04}{100}=0,04 \qquad \frac{5}{1000}=\frac{005}{1000}=0,005$$

Запись дробной части десятичной дроби содержит столько цифр, сколько нулей в записи знаменателя соответствующей обыкновенной дроби.

	целая часть			дробная часть				
число		**2**	**3**	**7**	**0**	**5**	**4**	**9**
разряды	сотни	десятки	единицы	десятые	сотые	тысячные	десятитысячные	стотысячные

$1\text{ м}=100\text{ см}$

$1\text{ см}=\frac{1}{100}\text{ м}$

$375\text{ см}=\frac{375}{100}\text{ м}=3,75\text{ м}$

$1\text{ кг}=1000\text{ г}$

$1\text{ г}=\frac{1}{1000}\text{ кг}$

$28\text{ г}=\frac{28}{1000}\text{ кг}=0,028\text{ кг}$

$7933\text{ г}=\frac{7933}{1000}\text{ кг}=7,933\text{ кг}$

§ 31. Сравнение десятичных дробей

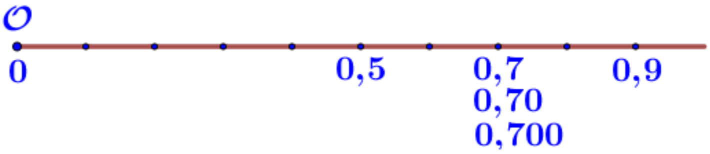
$41,9=41,90$
$0,3=0,300$

Если к десятичной дроби справа приписать любое количество нулей, то получится дробь, равная данной.

$1,700=1,7$
$0,60=0,6$

Значение дроби, оканчивающейся нулями, не изменится, если последние нули в её записи отбросить.

$7\text{ дм}=70\text{ см}=700\text{ мм}$ $\qquad 0,7\text{ м}=0,70\text{ м}=0,700\text{ мм}$ $\qquad 0,7=0,70=0,700$



точка с меньшей координатой расположена левее

$0,5<0,700<0,9$

Сравнение

$5{,}3 > 4{,}99$

Из двух десятичных дробей больше та, у которой целая часть больше.

$3{,}2$ и $3{,}198$

$3{,}200 > 3{,}198$

$3{,}2 > 3{,}198$

Чтобы сравнить две десятичные дроби с равными целыми частями и различным количеством цифр после запятой, надо с помощью приписывания нулей справа уравнять количество цифр в дробных частях, после чего сравнить полученные дроби поразрядно.

Приписывая нули, мы приводим дробную часть к общему «знаменателю».

$3\frac{2}{10}$ и $\frac{198}{1000}$

$3\frac{200}{1000} > 3\frac{198}{1000}$

§ 32. Округление чисел. Прикидки

до целых

$73{,}\underline{2}7 \approx 73$

до сотых

$3{,}80\underline{3}47 \approx 3{,}80$

до десятых

$0{,}1\underline{5}04 \approx 0{,}2$

до тысячных

$1{,}005\underline{8} \approx 1{,}006$

Для того чтобы десятичную дробь округлить до единиц, десятых, сотых и т. д., надо все следующие за этим разрядом цифры отбросить. Если при этом <u>первая</u> из отбрасываемых цифр равна **0, 1, 2, 3** или **4**, то последняя из оставшихся цифр **не изменяется**; если же первая из отбрасываемых цифр равна **5, 6, 7, 8** или **9**, то последняя из оставшихся цифр **увеличивается** на единицу. Если в итоге округления число оканчивается на 0, он не отбрасывается.

до десятков

$23\underline{1} \approx 230$

до тысяч

$984 \approx 1000$

до сотен

$8\ 7\underline{6}3 \approx 8\ 800$

до десятков тысяч

$96\underline{5}\ 348 \approx 970\ 000$

При округлении натуральных чисел до какого-либо разряда вместо всех следующих за ним цифр младших разрядов пишут нули. При этом если первая из цифр, следовавших за этим разрядом, была равной **5, 6, 7, 8** или **9**, то цифра в данном разряде увеличивается на единицу.

0, 1, 2, 3, 4

цифра **не меняется**

5, 6, 7, 8, 9

цифра **увеличивается на 1**

§ 33. Сложение и вычитание десятичных дробей

Сложение

Чтобы ***сложить*** две десятичные дроби, надо:

1. уравнять в слагаемых количество цифр после запятой;
2. записать слагаемые друг под другом так, чтобы каждый разряд второго слагаемого оказался под соответствующим разрядом первого слагаемого;
3. сложить полученные числа так, как складывают натуральные числа; поставить в полученной сумме запятую под запятыми в слагаемых.

1) $0{,}12+1{,}25=1{,}37$ 2) $0{,}123+1{,}1=1{,}223$ 3) $2+3{,}27=5{,}27$

$$\begin{array}{r} 0{,}12 \\ +\,1{,}25 \\ \hline 0{,}37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}123 \\ +\,1{,}100 \\ \hline 1{,}223 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}00 \\ +\,3{,}27 \\ \hline 5{,}27 \end{array}$$

Вычитание

Чтобы из одной десятичной дроби ***вычесть*** другую, надо:

1. уравнять в уменьшаемом и вычитаемом количество цифр после запятой;
2. записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы каждый разряд вычитаемого оказался под соответствующим разрядом уменьшаемого;
3. произвести вычитание так, как вычитают натуральные числа;
4. поставить в полученной разности запятую под запятыми в уменьшаемом и вычитаемом.

1) $3{,}48-0{,}04=3{,}44$ 2) $30{,}4-0{,}007=30{,}393$ 3) $9-3{,}16=5{,}84$

$$\begin{array}{r} 3{,}48 \\ -\,0{,}04 \\ \hline 3{,}44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30{,}400 \\ -\,0{,}007 \\ \hline 30{,}393 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}00 \\ -\,3{,}16 \\ \hline 5{,}84 \end{array}$$

Разложение числа по разрядам: $0{,}821=0{,}8+0{,}02+0{,}001$.

§ 34. Умножение десятичных дробей

Умножение

Чтобы ***перемножить*** две десятичные дроби, надо:

1. умножить их как натуральные числа, не обращая внимания на запятые;
2. в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятых в обоих множителях вместе.

1) $0{,}6\cdot 4=2{,}4$ 2) $0{,}103\cdot 0{,}3=0{,}0309$

$$\begin{array}{rl} 0{,}6 & \text{один знак после запятой} \\ \times\,4 & \\ \hline 2{,}4 & \text{один знак} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0{,}103 & \text{три знака после запятой} \\ \times\,0{,}3 & \text{один знак} \\ \hline 0{,}0309 & \text{четыре знака} \end{array}$$

Чтобы **умножить** десятичную дробь **на 10, 100, 1000** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую <u>вправо</u> соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры.

1) $5{,}764\cdot10=5{,}764\cdot10=57{,}64=57{,}64$

2) $145{,}4\cdot1000=145{,}4\cdot1000=145\,400{,}0=145\,400$

Чтобы **умножить** десятичную дробь на **0,1; 0,01; 0,001** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую <u>влево</u> соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры.

1) $245\cdot0{,}1=245\cdot0{,}1=24{,}5=24{,}5$

2) $39\cdot0{,}001=39\cdot0{,}001=0{,}039=0{,}039$

Свойства умножения выполняются и для дробных чисел:

переместительное	*сочетательное*	*распределительное*
$ab=ba$	$(ab)c=a(bc)$	$a(b+c)=ab+ac$

§ 35. Деление десятичных дробей

Деление на натуральное число

Чтобы **разделить** десятичную дробь на натуральное число, надо:

1. разделить дробь на натуральное число, не обращая внимания на запятую;
2. поставить запятую перед использованием цифры после запятой

1) $18{,}48:8=2{,}31$

$$\begin{array}{r|l} 18{,}48 & 8 \\ \underline{16} & \overline{2{,}31} \\ 24 & \\ \underline{24} & \\ 8 & \\ \underline{8} & \\ 0 & \end{array}$$

2) $17{,}4:15=1{,}16$

$$\begin{array}{r|l} 17{,}4 & 15 \\ \underline{15} & \overline{1{,}16} \\ 24 & \\ \underline{15} & \\ 90 & \\ \underline{90} & \\ 0 & \end{array}$$

3) $3:4=0{,}75$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 4 \\ \underline{2\,8} & \overline{0{,}75} \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

Чтобы **разделить** десятичную дробь на **10, 100, 1 000** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую <u>влево</u> на 1, 2, 3 и т. д. цифры.

1) $38{,}4:10=38{,}4:10=3{,}84=3{,}84$

2) $15{,}6:1000=15{,}6:1000=0{,}0156=0{,}0156$

3) $0{,}07:100=0{,}07:100=0{,}0007=0{,}0007$

Деление на десятичную дробь

Если делимое и делитель увеличить одновременно в 10, 100, 1000 и т.д. раз, то частное не изменится.

Чтобы **разделить** десятичную дробь на десятичную, надо:

1. перенести в делимом и в делителе запятые вправо на столько цифр, сколько их содержится после запятой в делителе;
2. выполнить деление на натуральное число.

1) $75,3:1,5=50,2$

$$\begin{array}{r|l} -753,0 & 15 \\ \underline{75} & \overline{50,2} \\ -030 & \\ \underline{30} & \\ 0 & \end{array}$$

2) $10:0,125=80$

$$\begin{array}{r|l} -10000 & 125 \\ \underline{1000} & \overline{80} \\ 0 & \end{array}$$

3) $2,1:0,06=35$

$$\begin{array}{r|l} -210 & 6 \\ \underline{18} & \overline{35} \\ -30 & \\ \underline{30} & \\ 0 & \end{array}$$

Чтобы **разделить** десятичную дробь на **0,1; 0,01; 0,001** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую <u>вправо</u> на 1, 2, 3 и т. д. цифры.

1) $44,31:0,1=44,31:0,1=443,1=443,1$

2) $58,3:0,01=58,3\cdot 0,01=5830=5830$

<u>§ 36. Среднее арифметическое. Среднее значение величины</u>

Определение

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых.

Пример Найти среднее арифметическое чисел 2, 5, 8, 9.

Решение: $(2+5+8+9):4=6$

Средняя скорость

Чтобы найти **среднюю скорость**, надо:
1) найти весь пройденный путь;
2) найти все время движения;
3) весь пройденный путь разделить на все время движения:

Пример Автомобиль ехал 4 ч со скоростью 54 км/ч и 2 ч со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всём пути.

Решение: $\dfrac{54\cdot 4+60\cdot 2}{4+2}=\dfrac{216+120}{6}=\dfrac{336}{6}=56$ (км/ч)

§ 37. Проценты. Нахождение процентов от числа

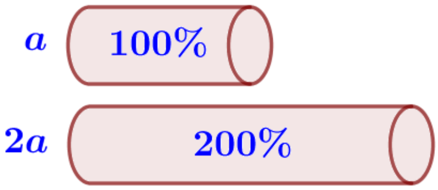
Определение

Процентом называют сотую часть величины или числа

Чтобы найти **1%** величины, надо ее значение разделить на 100.

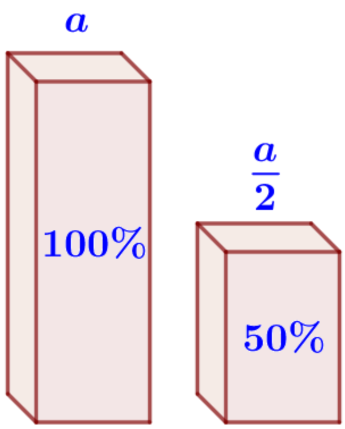
$$1\% \text{ от } 200 - \text{это } 200:100=2$$

$$1\% \text{ от } 34 - \text{это } 34:100=0{,}34$$



Если величина стала **в 2 раза больше**, то она **увеличилась на 100%**.

Если величина стала **в 2 раза меньше**, то она **уменьшилась на 50%**.



Любое количество процентов можно записать в виде десятичной дроби или натурального числа.

$$23\%=0{,}23 \qquad 80\%=0{,}80=0{,}8 \qquad 300\%=3$$

Для того, чтобы записать десятичную дробь или натуральное число в процентах, нужно число умножить на 100 и к результату приписать знак %.

$$1=100\% \qquad 5{,}4=540\% \qquad 0{,}02=2\% \qquad 7=700\%$$

100% – 15 (число)
6% – ? (процент)

$$15:100\cdot 6=0{,}9$$

Чтобы найти **процент от числа**, надо:

1. разделить число на 100;
2. умножить полученное частное на количество процентов.

§ 38. Нахождение числа по его процентам

12% – 42 (процент)
100% – ? (число)

$$42:12\cdot 100=350$$

Чтобы найти **число по его процентам**, надо:

1. разделить число на количество процентов;
2. умножить полученное частное на 100.

ЗАМЕТКИ