24. Геометрическая задача на доказательство
Блок 1. ФИПИ

1. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

2. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.

3. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

4. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.

5. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны CD. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что CM – биссектриса угла BCD.

6. Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка K – середина стороны BC. Докажите, что AK – биссектриса угла BAD.

7. Сторона AB параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AD. Точка L – середина стороны AB. Докажите, что DL – биссектриса угла ADC.

8. Сторона CD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка N – середина стороны CD. Докажите, что BN – биссектриса угла ABC.

9. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Докажите, что M – середина CD.

10. Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L – середина AB.

11. Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.

12. Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K – середина BC.

13. Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

14. Биссектрисы углов A и B трапеции ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD. Докажите, что точка K равноудалена от прямых AB, BC и AD.

15. Биссектрисы углов C и D трапеции ABCD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.

16. Биссектрисы углов B и C трапеции ABCD пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

17. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

18. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

19. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников AEB и CED равна половине площади параллелограмма.

20. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников AFB и CFD равна половине площади параллелограмма.

21. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

22. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

23. Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

24. Точка K – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

25. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

26. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

27. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

28. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников BMC и AMD равна половине площади трапеции.

29. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

30. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 7 и 28, $BD = 14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

31. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 45, $BD = 15$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

32. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 2 и 32, $BD = 8$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

33. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

34. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

35. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.

36. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

37. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.

38. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

39. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.

40. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

41. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

42. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

43. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

44. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

45. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

46. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что CD и EF перпендикулярны.

47. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

48. Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T, причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST. Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.

49. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a:b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a:b$.

50. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

24. Геометрическая задача на доказательство
Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

1.На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

2.На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что углы AEB и BDC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

3.В параллелограмме ABCD точка E – середина стороны CD. Известно, что $EA = EB$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

4.В параллелограмме ABCD точка K – середина стороны AB. Известно, что $KC = KD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

5.В параллелограмме KLMN точка B – середина стороны LM. Известно, что $BK = BN$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

6.6. В равнобедренном треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK – равнобедренный.

7.В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что MNK – равносторонний.

8.В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что BMKN – ромб.

9.Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.

7. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.

8.Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.

9.Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.

10. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника AOB.

11. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника AKD.

12. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника BOC.

13. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

14. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.

15. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы CC_1B_1 и CBB_1 равны.

16. В остроугольном треугольнике ABC точки A, C, центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60°.

17. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°. Докажите, что точки A, C, центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.