14. Неравенства
Часть 1. ФИПИ (www.fipi.ru) + другие источники (*)

I) Показательные неравенства

Задание 1. Решите неравенство:

1) $12^x-8^x-2\cdot 6^{x+1}+3\cdot 4^{x+1}+32\cdot 3^x-2^{x+5}\le 0$;
2) $63^x-27^x-12\cdot 21^x+12\cdot 9^x+27\cdot 7^x-3^{x+3}\le 0$;
3) $45^x-27^x-18\cdot 15^x+2\cdot 9^{x+1}+81\cdot 5^x-3^{x+4}\le 0$;
4) $28^x-8^x-16\cdot 14^x+4^{x+2}+64\cdot 7^x-2^{x+6}\le 0$*;
5) $27\cdot 45^x-27^{x+1}-12\cdot 15^x+12\cdot 9^x+5^x-3^x\le 0$*;
6) $2\cdot 20^x-2\cdot 8^x-17\cdot 10^x+17\cdot 4^x+8\cdot 5^x-2^{x+3}\le 0$*.

Задание 2. Решите неравенство:

1) $\frac{1}{5^x+31}\le\frac{4}{5^{x+1}-1}$;
2) $\frac{1}{2^x+21}\le\frac{3}{2^{x+2}-1}$*;
3) $\frac{2}{7^x-7}\ge\frac{5}{7^x-4}$;
4) $\frac{4}{3^x-3}\ge\frac{5}{3^x-2}$*;
5) $\frac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\frac{1}{3^x-2}$;
6) $\frac{6^x-1}{6^x-6}\le 1+\frac{3}{6^x-4}$*;
7) $\frac{4^x-2}{4^x-3}\le 1-\frac{1}{4^x-4}$;
8) $\frac{5^x-4}{5^x-3}\le 1-\frac{3}{5^x-5}$*;
9) $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$;
10) $\frac{16}{(3^{2-x^2}-1)^2}-\frac{10}{3^{2-x^2}-1}+1\ge 0$;
11) $\frac{15}{(4^{2-x^2}-1)^2}-\frac{16}{4^{2-x^2}-1}+1\ge 0$;
12) $\frac{105}{(2^{4-x^2}-1)^2}-\frac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\ge 0$*;
13) $\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge 0$;
14) $\frac{14^x-7^{x+1}-2^{x+1}+14}{-x^2+4x}\ge 0$*;
15) $\frac{10^x-25\cdot 2^x-2\cdot 5^x+50}{5x-x^2-4}\ge 0$;
16) $\frac{12^x-16\cdot 3^x-3\cdot 4^x+48}{6x-x^2-5}\ge 0$*.

Задание 3. Решите неравенство:

1) $\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\ge 0{,}5$;
2) $\frac{7-2\cdot 2^x}{4^x-12\cdot 2^x+32}\ge 0{,}25$*;
3) $\frac{31-5\cdot 2^x}{4^x-24\cdot 2^x+128}\ge 0{,}25$*;
4) $\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0$;
5) $\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{25^x-9\cdot 5^x+20}\le 0$*;
6) $\frac{3^x}{3^x-3}+\frac{3^x+1}{3^x-2}+\frac{5}{9^x-5\cdot 3^x+6}\le 0$*;
7) $\frac{6^x-4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x-5\cdot 2^x-4x+20}\le\frac{1}{x-5}$;
8) $\frac{15^x-9\cdot 5^x}{x\cdot 3^x-4\cdot 3^x-9x+36}\le\frac{1}{x-4}$*;
9) $\frac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1}+\frac{25^x-7\cdot 5^x+1}{5^x-7}\le 2\cdot 5^x-24$;
10) $\frac{4^x+2^{x+1}-36}{2^x-5}+\frac{4^{x+1}-2^{x+5}+4}{2^x-8}\le 5\cdot 2^x+7$*;
11) $\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5$;
12) $\frac{4^x-3\cdot 2^{x+2}+5}{2^x-3}+\frac{3\cdot 2^{x+2}-4}{2^x-4}\le 2^x+3$*.

Задание 4. Решите неравенство:

1) $\frac{9^x-3^x+2}{9^x-3^x}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+1}-2}{3^x}$;

2) $\frac{4^x-2^x+1}{4^x-2^x}+\frac{2^{x+1}-9}{2^x-7}\le\frac{3\cdot 2^x-1}{2^x}$ *;

3) $2^x-6-\frac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}$;

4) $5^x-24-\frac{22\cdot 5^x-113}{25^x-7\cdot 5^x+10}\le\frac{1}{5^x-5}$ *;

5) $125^x-25^x+\frac{4\cdot 25^x-20}{5^x-5}\le 4$;

6) $8^x-3\cdot 4^x+\frac{9\cdot 4^x-288}{2^x-9}\le 32$ *;

7) $\frac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot 2^x+4}\le\frac{2^x-9}{2^x-4}+\frac{1}{2^x-6}$;

8) $\frac{9^x-10\cdot 3^x+9}{9^x-4\cdot 3^x+3}\le\frac{3^x-11}{3^x-3}+\frac{1}{3^x-5}$ *.

II) Логарифмические неравенства

Задание 5. Решите неравенство:

1) $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$;

2) $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+22\log_2 x+24<11\log_2^2 x$ *;

3) $\frac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2 x-9}\ge -1$;

4) $\frac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36}\ge -1$;

5) $\frac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x+\log_3 x^4}\le 1$;

6) $\frac{\log_7(49x)-3}{\log_7^2 x+\log_7 x^2}\le 1$*;

7) $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\ge\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$;

8) $\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x-5}+\frac{\log_2 x-5}{\log_2(32x)}\ge\frac{\log_2 x^{16}+18}{\log_2^2 x-25}$;

9) $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\frac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\ge\frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$;

10) $\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x-4}+\frac{\log_3 x-4}{\log_3(81x)}\ge\frac{24-\log_3 x^8}{\log_3^2 x-16}$;

11) $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)}\ge\frac{2}{\log_8 x}+\frac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}$;

12) $\frac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)}\ge\frac{2}{\log_3 x}+\frac{5}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}$ *;

13) $1+\frac{5}{\log_4 x-3}+\frac{6}{\log_4^2 x-\log_4(64x^6)+12}\ge 0$;

14) $1+\frac{10}{\log_2 x-5}+\frac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\ge 0$;

15) $\frac{2\log_9(x^2+4x)}{\log_9 x^2}\le 1$;

16) $\frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2}\le 1$.

Задание 6. Решите неравенство:

1) $\log_2^2(x^2-9)-9\log_2(x^2-9)+20\ge 0$;

2) $\log_3^2(x^2-16)-5\log_3(x^2-16)+6\ge 0$;

3) $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\ge 0$;

4) $\log_3^2(81-x^2)-7\log_3(81-x^2)+12\ge 0$;

5) $\log_4^2(64-x^2)-5\log_4(64-x^2)+6\ge 0$;

6) $\log_7^2(49-x^2)-3\log_7(49-x^2)+2\ge 0$ *.

Задание 7. Решите неравенство:

1) $x^2\log_{512}(x+7)\le\log_2(x^2+14x+49)$;
2) $x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7(x^2+6x+9)$*;
3) $x^2\log_{625}(6-x)\le\log_5(x^2-12x+36)$;
4) $x^2\log_{512}(4-x)\ge\log_2(x^2-8x+16)$;
5) $x^2\log_{625}(-2-x)\ge\log_5(x^2+4x+4)$;
6) $x^2\log_{81}(-1-x)\ge\log_3(x^2+2x+1)$*.

Задание 8. Решите неравенство:

1) $\log_3\big((2-x)(x^2+5)\big)\ge\log_3(x^2-5x+6)+\log_3(4-x)$;
2) $\log_5\big((3-x)(x^2+2)\big)\ge\log_5(x^2-7x+12)+\log_5(5-x)$.
3) $\log_2^2(8+2x-x^2)+9\log_{0,5}(8+2x-x^2)+18>0$;
4) $\log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0,5}(16+6x-x^2)+24>0$;
5) $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$;
6) $\log_5^2(5+4x-x^2)+4\log_{0,2}(5+4x-x^2)+3>0$*.

Задание 9. Решите неравенство:

1) $\log_5\left(\frac{2}{x}+2\right)-\log_5(x+3)\le\log_5\left(\frac{x+6}{x^2}\right)$;
2) $\log_3\left(\frac{1}{x}+2\right)-\log_3(x+5)\le\log_3\left(\frac{x+4}{x^2}\right)$;
3) $\log_7(2x^2+12)-\log_7(x^2-x+12)\ge\log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$;
4) $\log_3(x^2+2)-\log_3(x^2-x+12)\ge\log_3\left(1-\frac{1}{x}\right)$*;
5) $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\ge\log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right)$;
6) $\log_3(2x+1)+\log_3\left(\frac{1}{32x^2}+1\right)\ge\log_3\left(\frac{1}{16x}+1\right)$*;
7) $\log_2(4x^2-1)-\log_2x\le\log_2\left(5x+\frac{9}{x}-11\right)$;
8) $\log_5(4x^2-9)-\log_5x\le\log_5\left(5x+\frac{5}{x}-9\right)$*.

Задание 10. Решите неравенство:

1) $\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\ge\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$;
2) $\log_7(11x^2+10)-\log_7(x^2+x+1)\ge\log_7\left(\frac{x}{x+8}+10\right)$*;
3) $2\log_2(x\sqrt{5})-\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_2\left(5x^2+\frac{1}{x}-2\right)$;
4) $2\log_7(x\sqrt{2})-\log_7\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_7\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right)$*;
5) $9\log_{12}(x^2-3x-4)\le10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$;
6) $11\log_{11}(x^2+x-20)\le12+\log_{11}\frac{(x+5)^{11}}{x-4}$.

Задание 11. Решите неравенство:

1) $\frac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|}\le0$;
2) $\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le0$;
3) $\frac{\log_x(2x^{-1})\cdot\log_x(2x^2)}{\log_{(2x)}x\cdot\log_{(2x^{-2})}x}<40$;
4) $\frac{\log_x(5x^{-1})\cdot\log_x(5x^3)}{\log_{(5x)}x\cdot\log_{(5x^{-3})}x}<105$*.

Задание 12. Решите неравенство:

1) $\log_{49}(x+4)+\log_{(x^2+8x+16)}\sqrt{7}\le -\frac{3}{4}$;

2) $\log_{25}(x+3)+\log_{(x^2+6x+9)}\sqrt{5}\le -\frac{3}{4}$*;

3) $\log_{16}(x+5)+\log_{(x^2+10x+25)}2\ge \frac{3}{4}$*;

4) $\log_{81}(x+6)+\log_{(x^2+12x+36)}3\ge \frac{3}{4}$*;

5) $(2-3x)\cdot\log_{2x-1}(x^2-2x+2)\le 0$;

6) $(20-11x)\cdot\log_{5x-9}(x^2-4x+5)\le 0$;

7) $(3x+10)\cdot\log_{2x+7}(x^2+6x+10)\ge 0$*;

8) $(4x+9)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\ge 0$*.