

13. Стереометрическая задача

Блок 1. ФИПИ (www.fipi.ru) + другие источники

1) Куб

Задание 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=4:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 3. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=2$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Задание 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Задание 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что $A_1P:PB_1=2:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
- Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

II) Параллелепипед

Задание 7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=5:3$ и $B_1F:FB=5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

- Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=2\sqrt{2}$, $AD=6$, $AA_1=10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=3:2$ и $B_1F:FB=3:7$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

- Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=4\sqrt{2}$, $AD=30$, $AA_1=35$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=6:1$ и $B_1F:FB=3:4$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

- Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 10. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB=2$, $AD=6$, $AA_1=6$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1 .

Задание 11. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 4$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

Задание 12. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

Задание 13. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

Задание 14. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Задание 15. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 16$, $AB = 15$.

Задание 16. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 12$, $AB = 8$.

III) Четырехугольная призма

Задание 17. На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB=4$, $AA_1=6$.

Задание 18. На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB=3$, $AA_1=9$.

Задание 19. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1 L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Задание 20. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=1$, $C_1 L=4$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Задание 21. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1 L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 22. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

IV) Треугольная призма

Задание 23. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер $A_1 C_1$ и $B_1 C_1$ соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Задание 24. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1 L = 4$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Задание 25. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1 L = 2$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 26. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1 L = 3$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Задание 28. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Задание 29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=3$.

а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

Задание 30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=2$.

а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

Задание 31. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Задание 32. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB=10$, $AC=16$ и $AA_1=5$.

V) Четырёхугольная пирамида

Задание 33. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3$, $SB=5$, $SD=3\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Задание 34. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=12$ и $BC=5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=5$, $SB=13$, $SD=10$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Задание 35. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

Задание 36. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=12$ и $BC=5$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3\sqrt{3}$, $SB=\sqrt{171}$, $SD=2\sqrt{13}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

Задание 37. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Задание 38. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Задание 39. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=2\sqrt{2}$, $BC=4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=4$.

Задание 40. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=6$.

Задание 41. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=9$.

Задание 42. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=4$, $BC=4\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=8$.

Задание 43. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Задание 44. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

Задание 45. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=4$.

- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
- Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Задание 46. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=4$ и диагональю $BD=7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=3$.

- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
- Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Задание 47. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=4$ и $AK=3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

Задание 48. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=AK=2$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

Задание 49. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

- Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Задание 50. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

- Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Задание 51. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Задание 52. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Задание 53. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM:MD=2:1$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Задание 54. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM:MD=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

VI) Треугольная пирамида

Задание 55. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

Задание 56. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=1:2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

Задание 57. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=5\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:3$. Найдите площадь сечения MNB .

Задание 58. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=9\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:7$. Найдите площадь сечения MNB .

Задание 59. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=6\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=1:2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

Задание 60. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=8\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=1:3$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

Задание 61. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Задание 62. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Задание 63. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 64. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 65. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 66. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 7. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 67. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 68. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 69. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=3$ и $AK=\frac{7}{4}$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

Задание 70. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна 2. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=2$ и $AK=\frac{4}{3}$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

Задание 71. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=4$, $SK:KB=1:3$.

- Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $ВСКМ$.

Задание 72. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{37}$. На рёбрах AB и SA отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK:KB=1:3$.

- Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $АСКМ$.

Задание 73. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Задание 74. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=3:1$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

VII) Шестиугольная пирамида

Задание 75. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 9. Точка M лежит на ребре AB , $AM=1$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

Задание 76. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. Точка M лежит на ребре AB , $AM=3$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

Задание 77. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $KM=KD$.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

Задание 78. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 9. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $KM=KD$.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

VIII) Цилиндр

Задание 79. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите объёма цилиндра, если $AB=7$, $BB_1=24$, $B_1C_1=10$.

Задание 80. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите объёма цилиндра, если $AB=9$, $BB_1=12$, $B_1C_1=8$.

Задание 81. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=20$, $BB_1=15$, $B_1C_1=21$.

Задание 82. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=15$, $BB_1=21$, $B_1C_1=20$.

Задание 83. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB=6$, $BB_1=15$, $B_1C_1=8$.

Задание 84. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите угол между прямыми ВВ₁ и А₁С₁, если АВ=20, ВВ₁=15, В₁С₁=21.

Задание 85. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите расстояние от точки В до прямой АС₁, если АВ=21, ВВ₁=12, В₁С₁=16.

Задание 86. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите расстояние от точки В до прямой АС₁, если АВ=15, ВВ₁=16, В₁С₁=12.

Задание 87. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

Задание 88. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

Задание 89. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=30^\circ$, $AB=1$, $CC_1=2\sqrt{2}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 90. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=30^\circ$, $AB=\sqrt{2}$, $CC_1=4$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 91. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=45^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите расстояние от точки В до прямой AC_1 .

Задание 92. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=45^\circ$, $AB=3\sqrt{2}$, $CC_1=6$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите расстояние от точки В до прямой AC_1 .