07. Производная и первообразная
Блок 1. ФИПИ (www.fipi.ru)

I) Физический смысл производной

Задание 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2+4t+27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=2$ с.

Задание 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^2-2t+44$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=6$ с.

Задание 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-5t^2+45t+130$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 20 м/с?

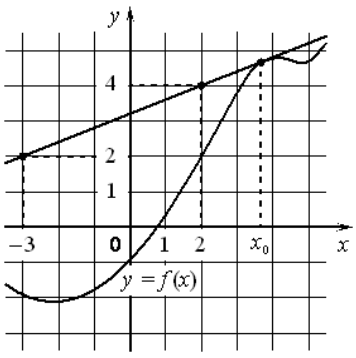
Задание 4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3+t^2-8t+180$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 40 м/с?

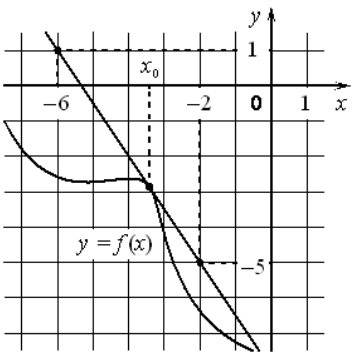
Задание 5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t-190$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 48 м/с?

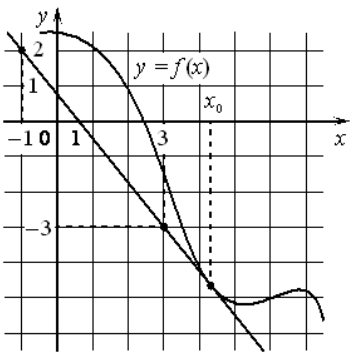
Задание 6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t^2+6t+250$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 96 м/с?

II) Геометрический смысл производной, касательная

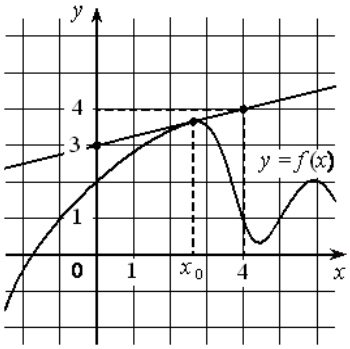
Задание 7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

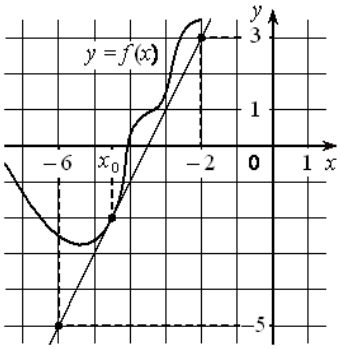
1) 

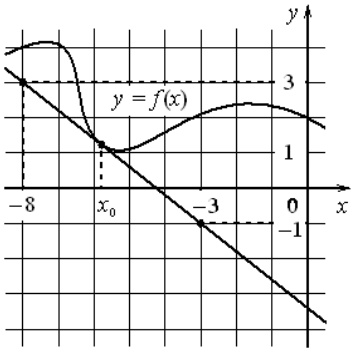
2) 

3) 

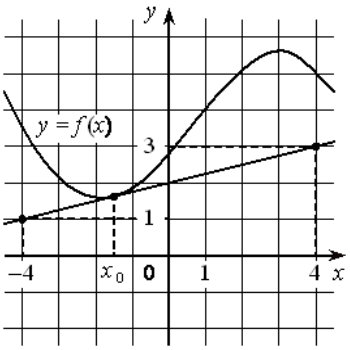
Задание 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

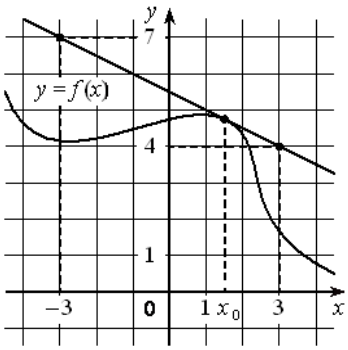
4)


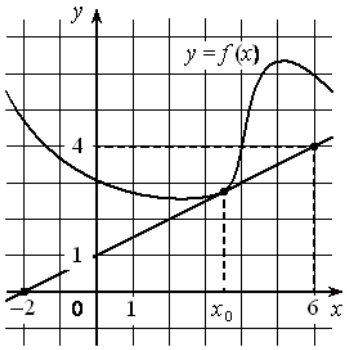
5)


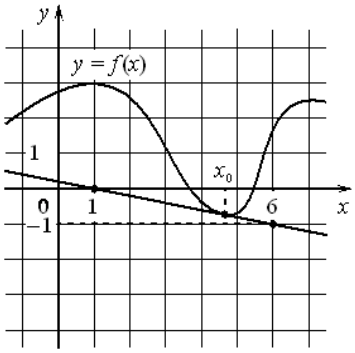
6)


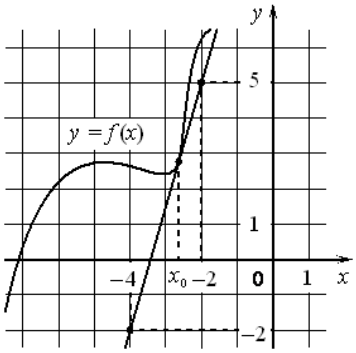
Задание 8. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

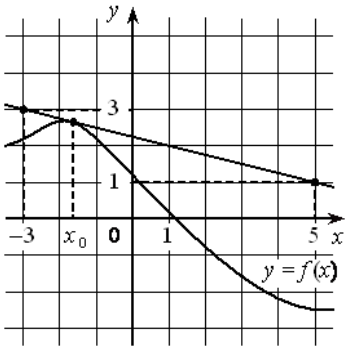
1)


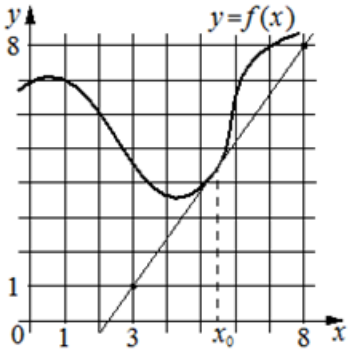
4)


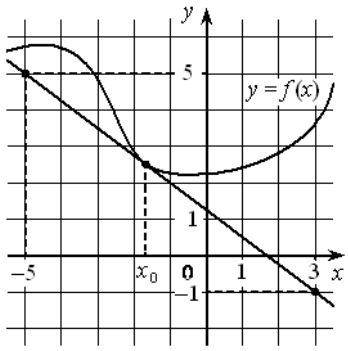
7)


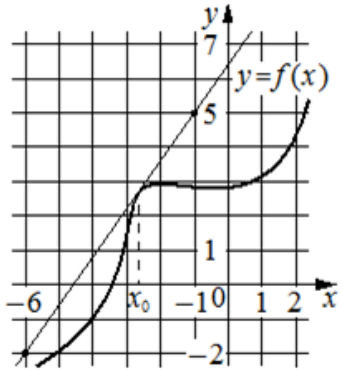
2)


5)


8)


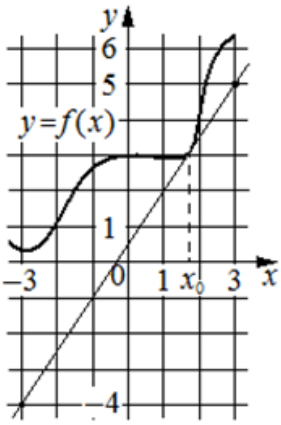
3)


6)


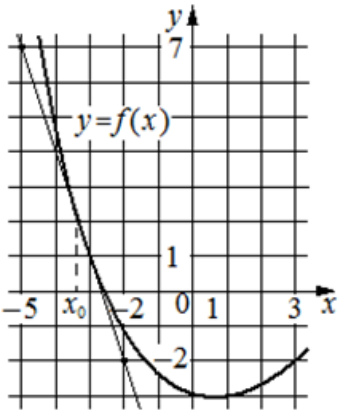
9)


Задание 8. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

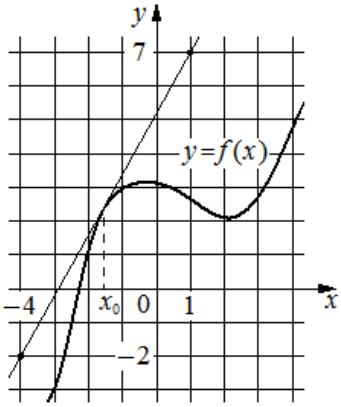
10)



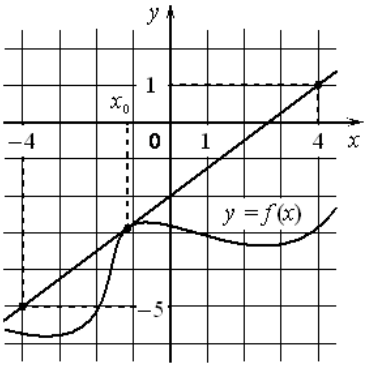
12)



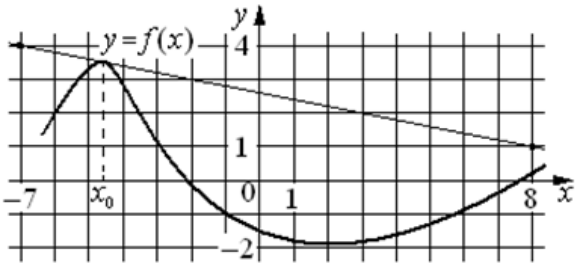
14)

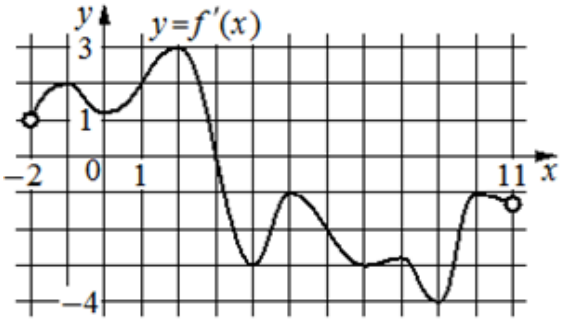


11)

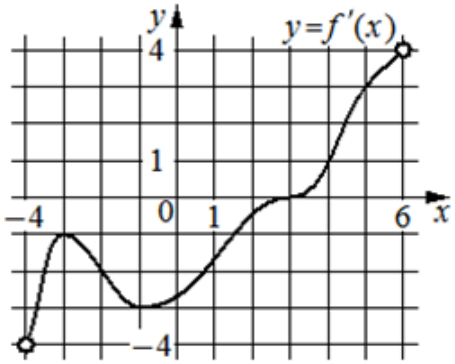


13)

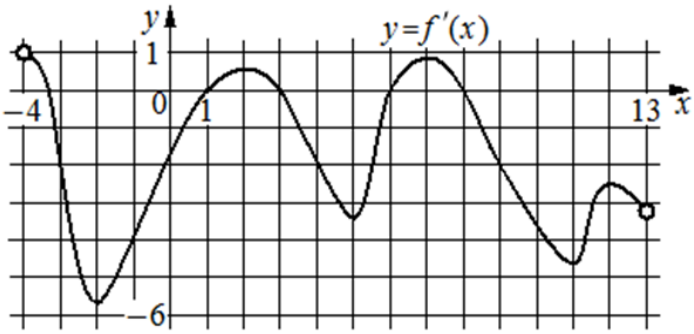




Задание 9. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



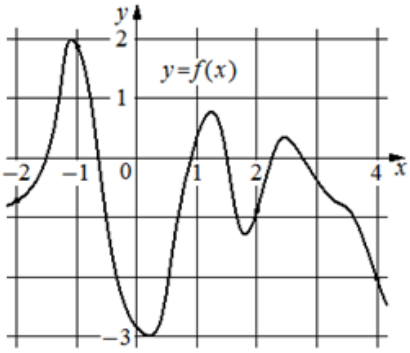
Задание 10. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=3x$ или совпадает с ней.



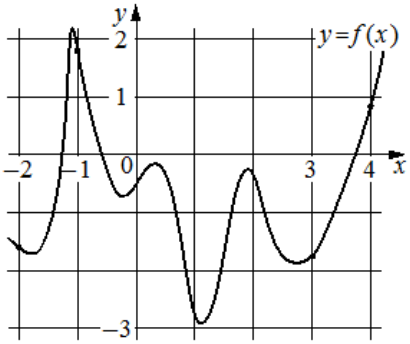
Задание 11. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ …

а) параллельна прямой $y=14$;

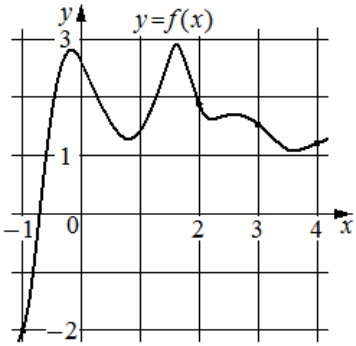
б) параллельна прямой $y=-2x-10$ или совпадает с ней.



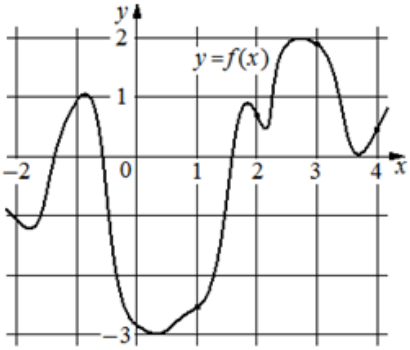
Задание 12. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2,-1,2,4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 13. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2,-1,3,4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

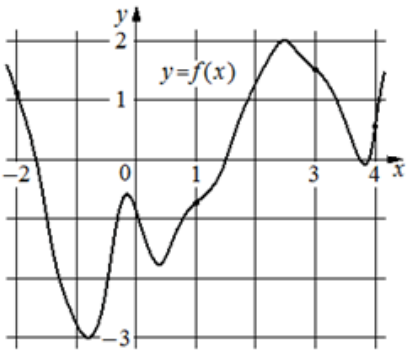


Задание 14. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1,2,3,4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 15. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки 1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Задание 16. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2,1,3,4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



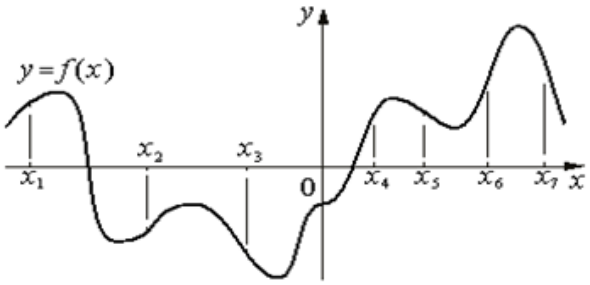
Задание 17.

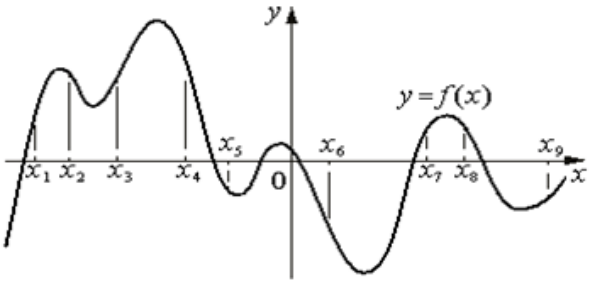
а) Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $f(x)=3x^2-3x+c$. Найдите c.

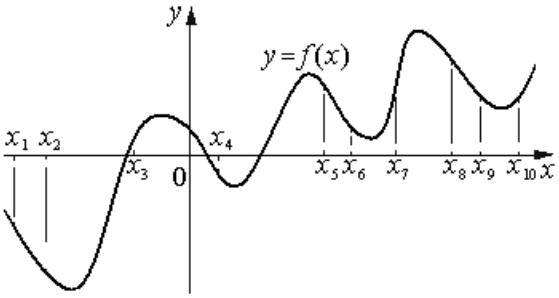
б) Прямая $y=-3x-5$ является касательной к графику функции $f(x)=x^2+7x+c$. Найдите c.

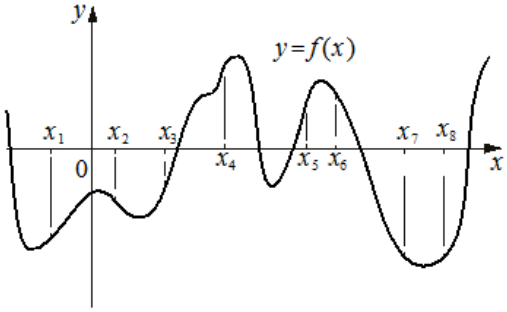
III) Исследование функций (производная)

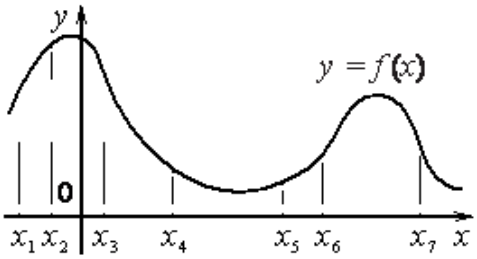
Задание 18. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

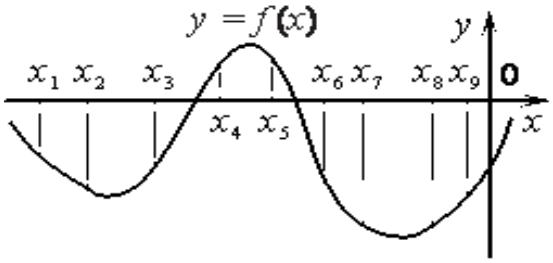
1)


4)


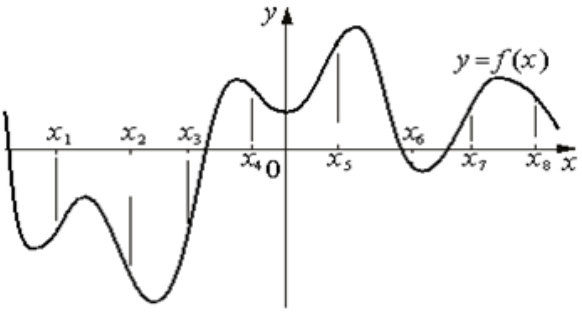
2)


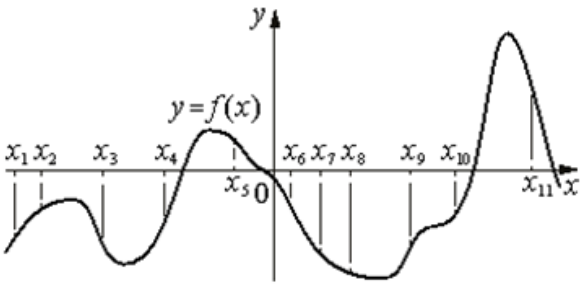
5)


3)


6)


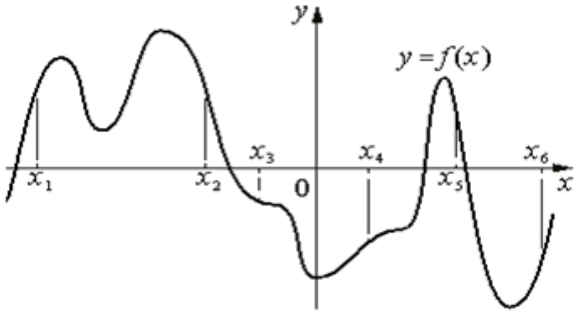
Задание 19. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

1)


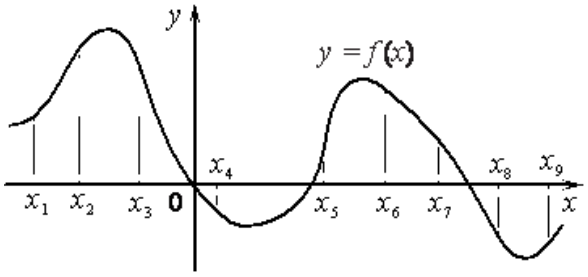
2)


Задание 19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

3)

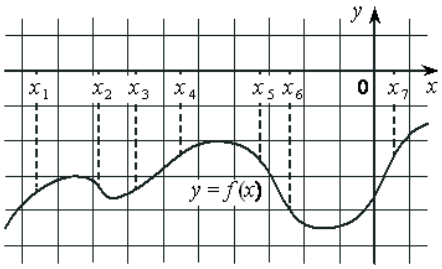


4)

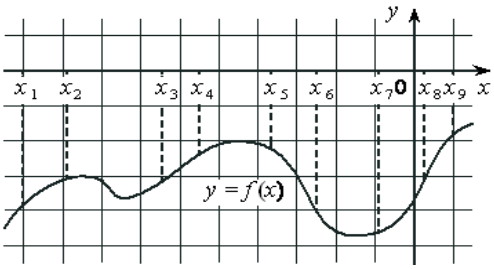


Задание 20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

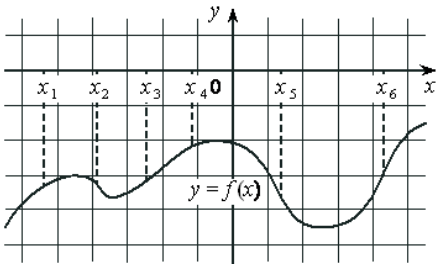
1)



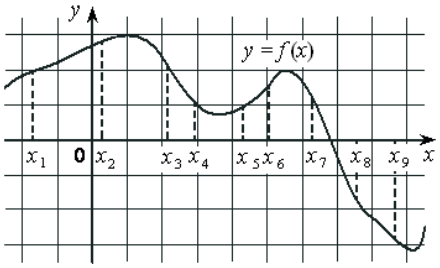
4)



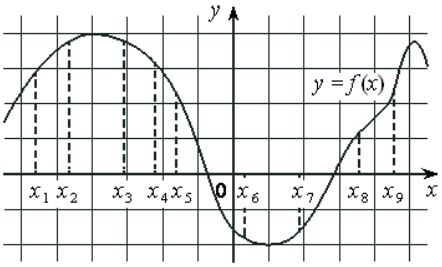
7)



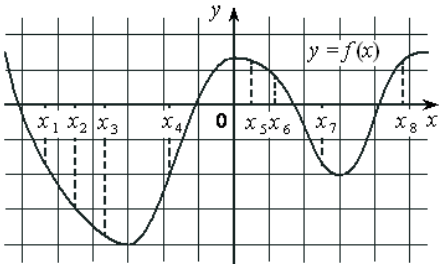
2)



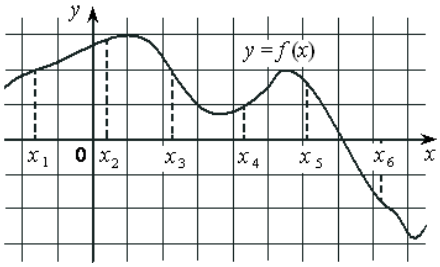
5)



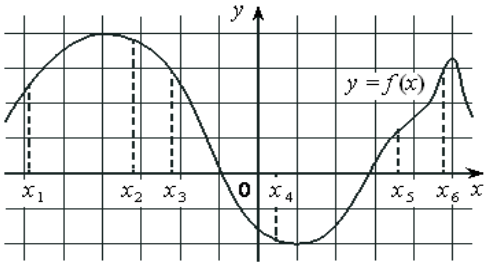
8)



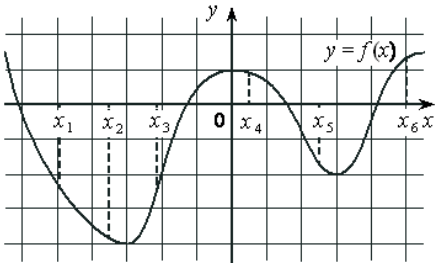
3)



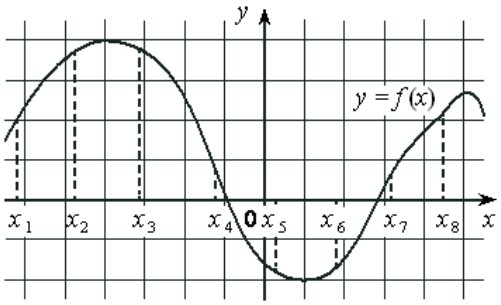
6)

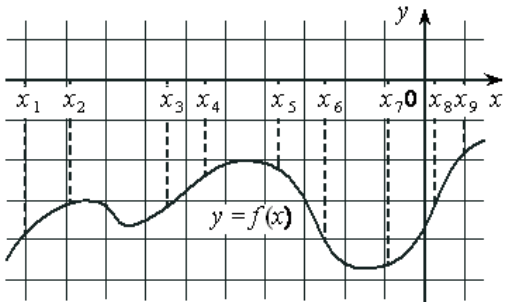


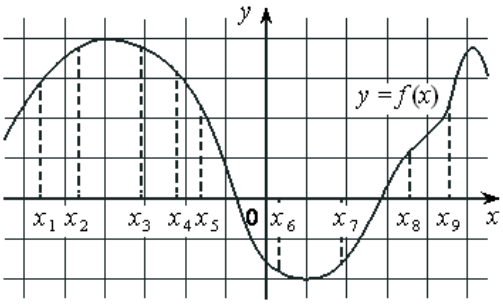
9)

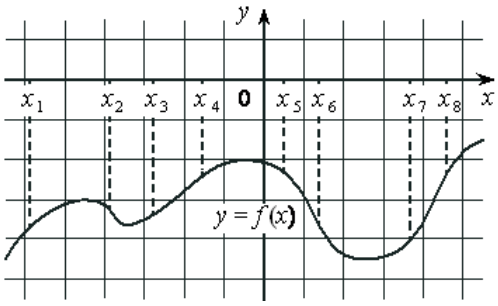


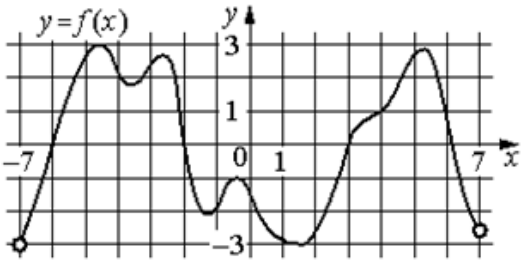
Задание 21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

1)


3)


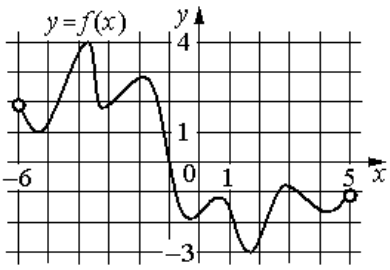
2)


4)




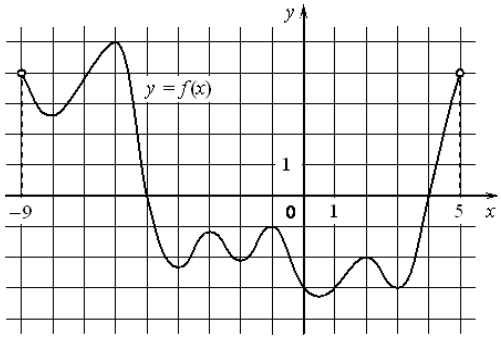
Задание 22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции…

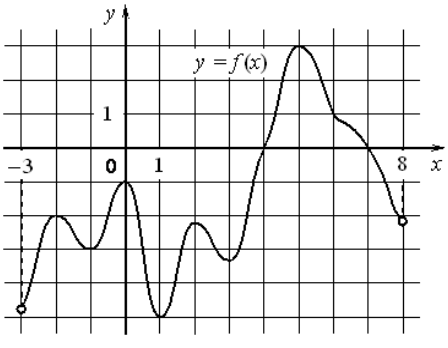
1) положительна;
2) отрицательна?



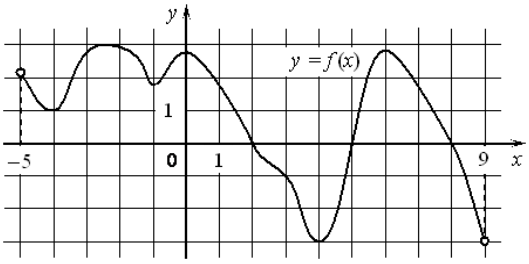
Задание 23. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

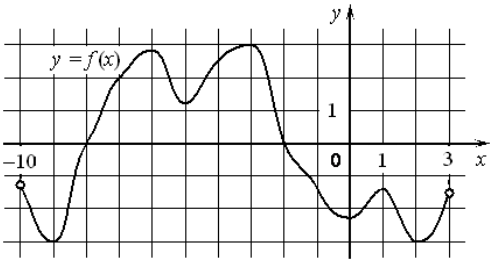
Задание 24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

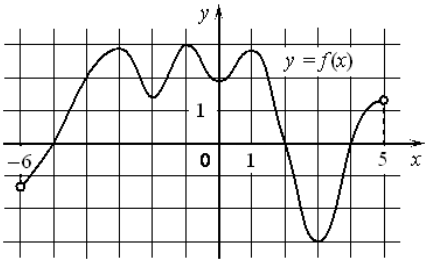
1)


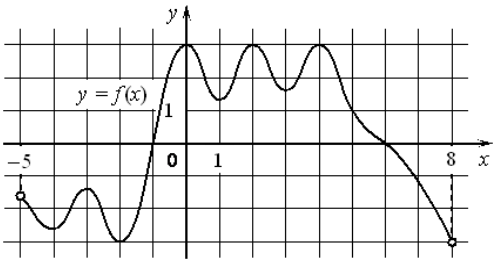
2)


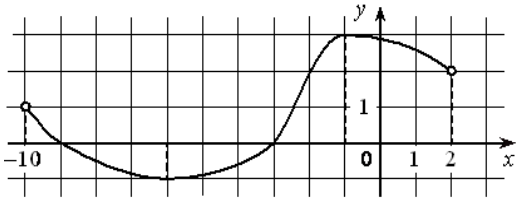
Задание 25. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

1)


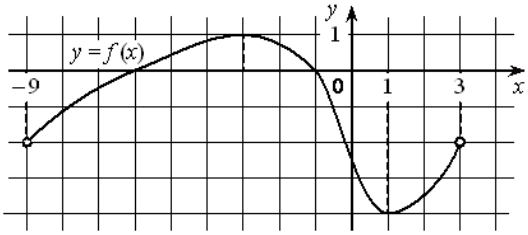
3)


2)


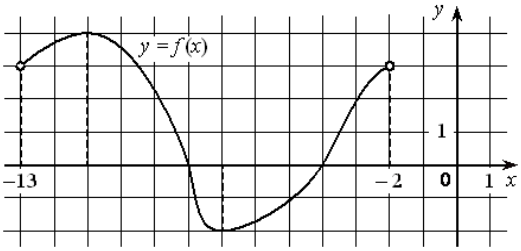
4)




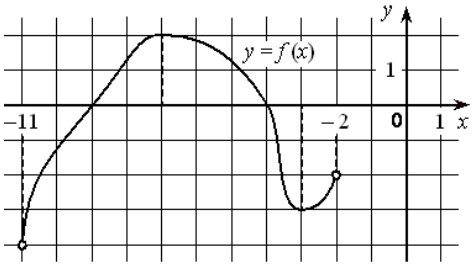
Задание 26. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 2)$. Найдите точку из отрезка $[-9; -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



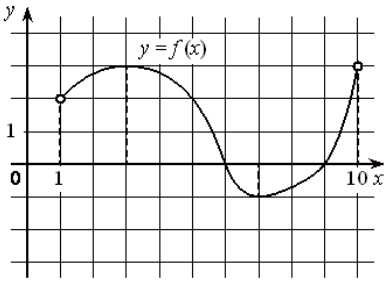
Задание 27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Найдите точку из отрезка $[-8; 0]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



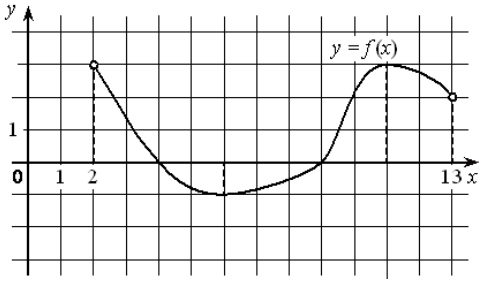
Задание 28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; -2)$. Найдите точку из отрезка $[-10; -3]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



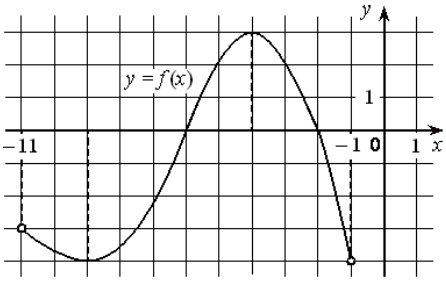
Задание 29. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; -2)$. Найдите точку из отрезка $[-10; -4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



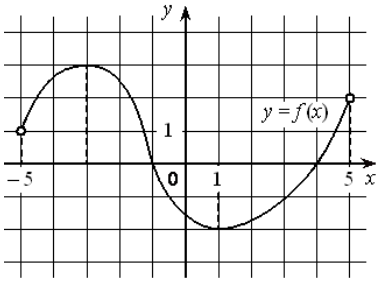
Задание 30. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку из отрезка $[2; 6]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



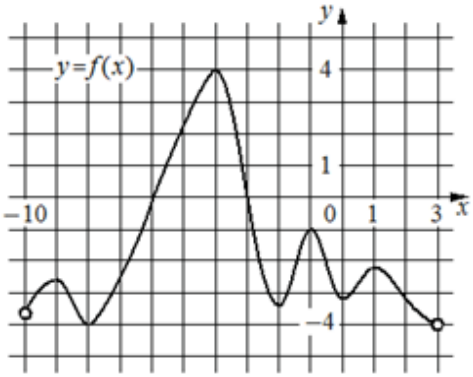
Задание 31. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 13)$. Найдите точку из отрезка $[7; 12]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



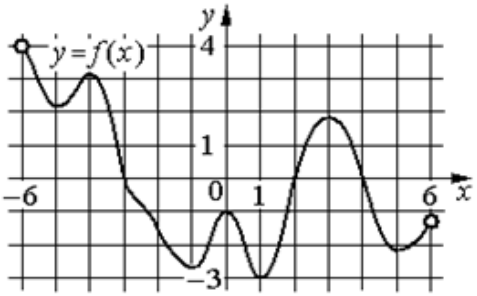
Задание 32. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; -1)$. Найдите точку из отрезка $[-7; -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Задание 33. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

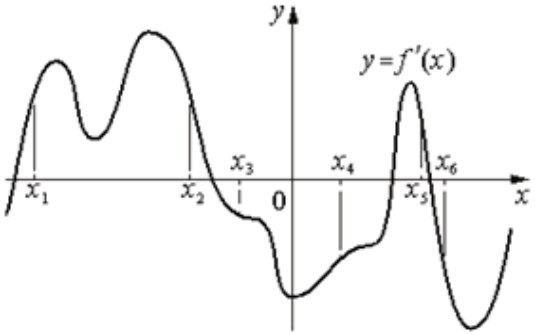


Задание 34. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-7; 2]$.

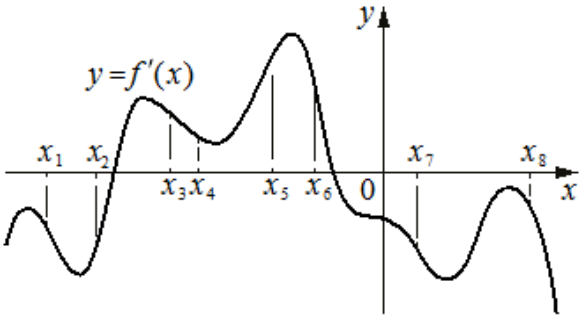


Задание 35. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4{,}5;\ 2{,}5]$.

Задание 36. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

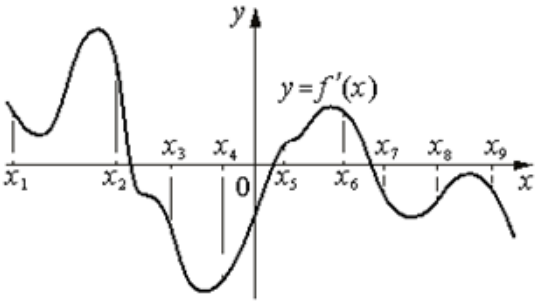


1)

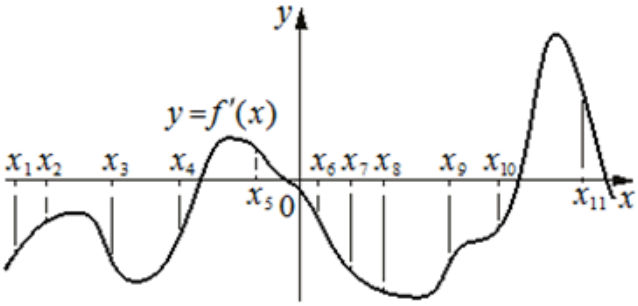


2)

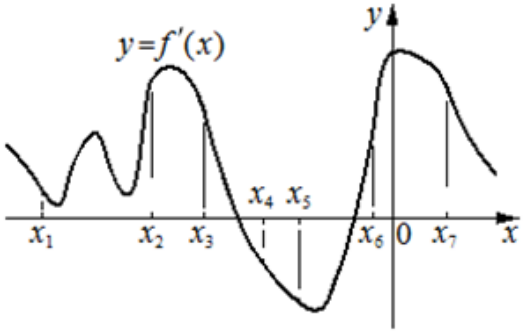
Задание 37. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



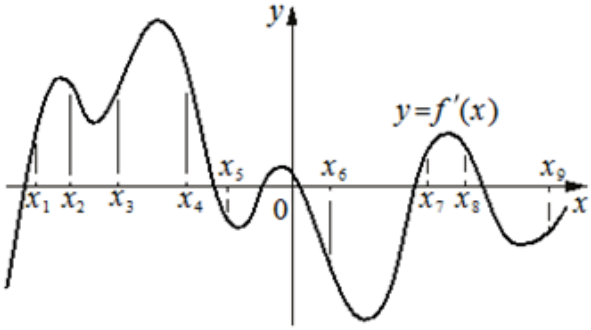
1)



4)

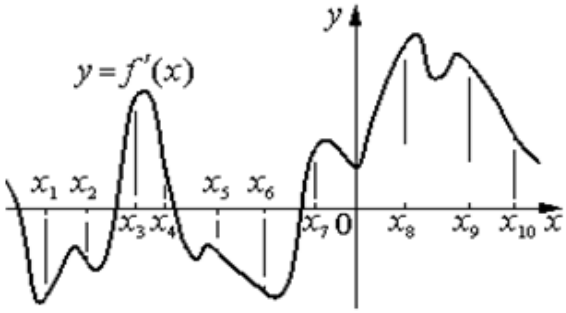


2)

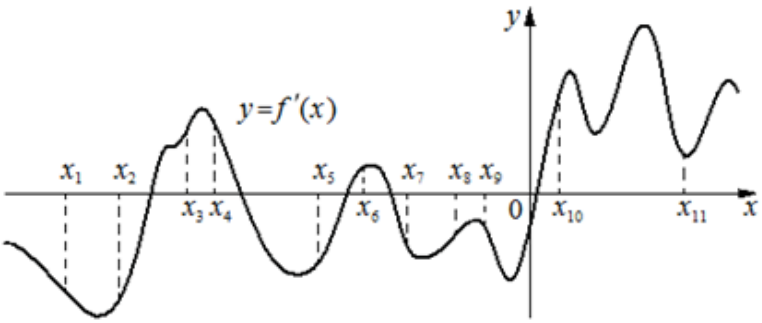


5)

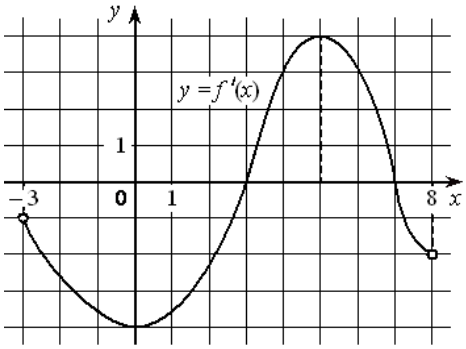
3)

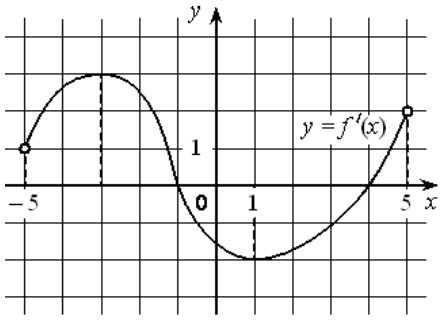


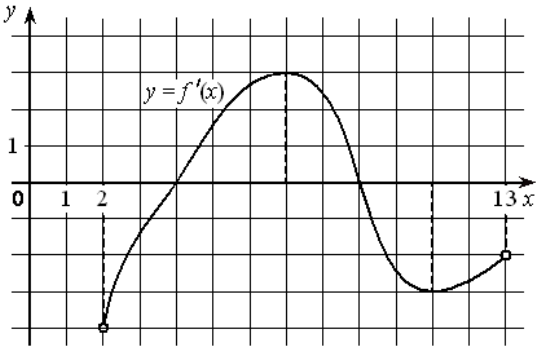
6)

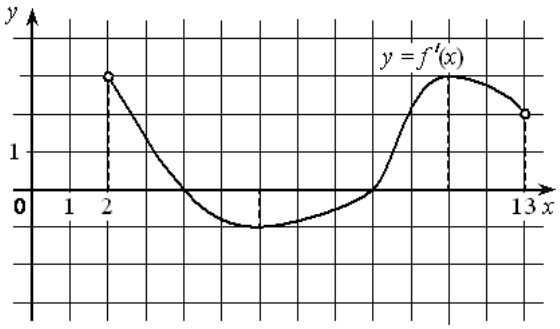


Задание 38. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

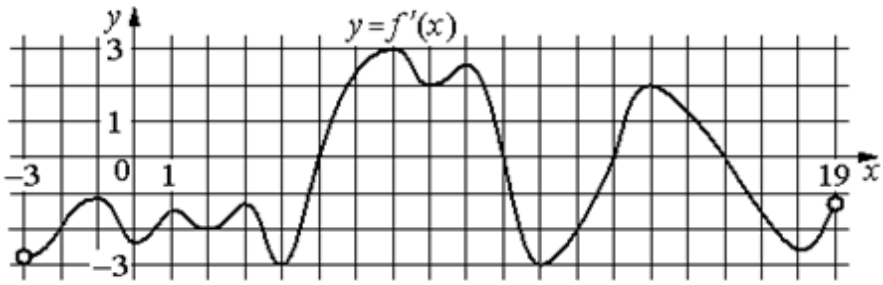
1)


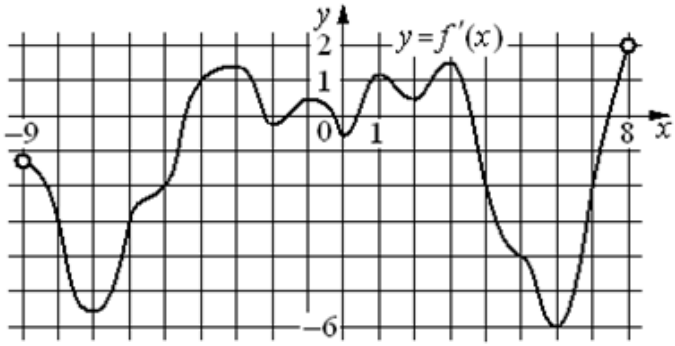
3)


2)


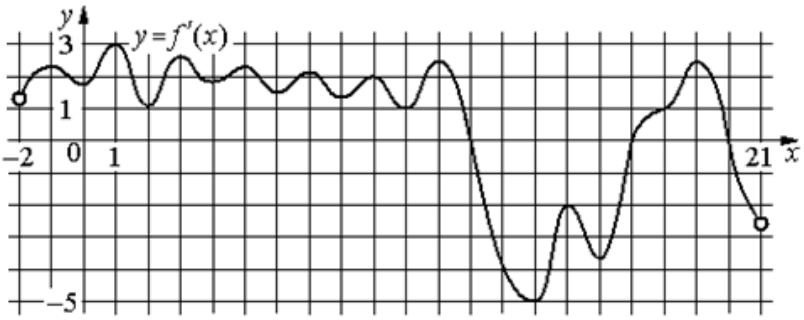
4)


Задание 39. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.

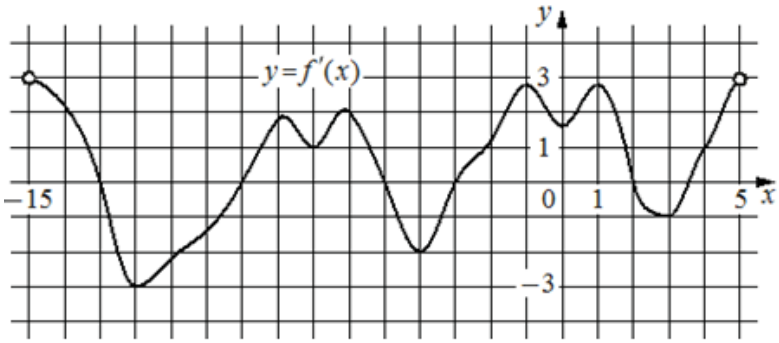




Задание 40. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 5]$.

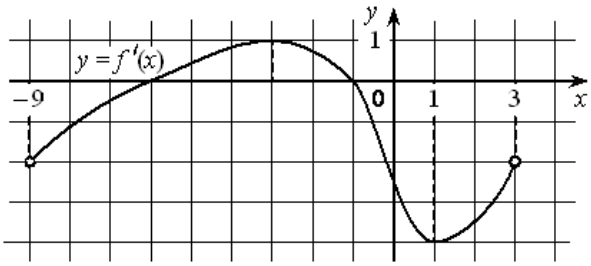


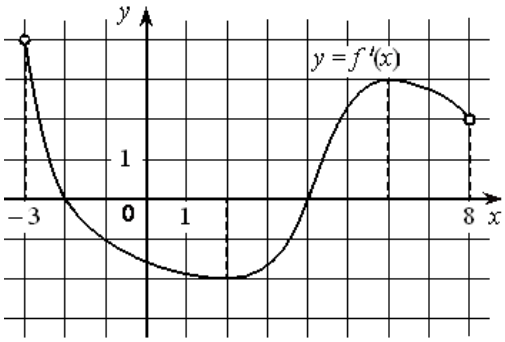
Задание 41. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 21)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-1; 16]$.



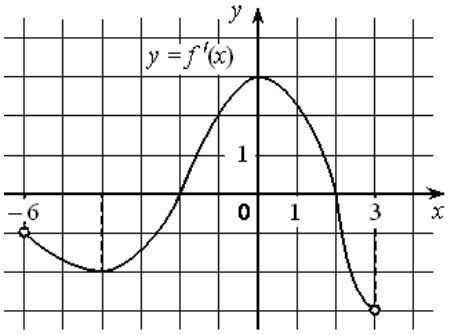
Задание 42. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-15; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11; 4]$.

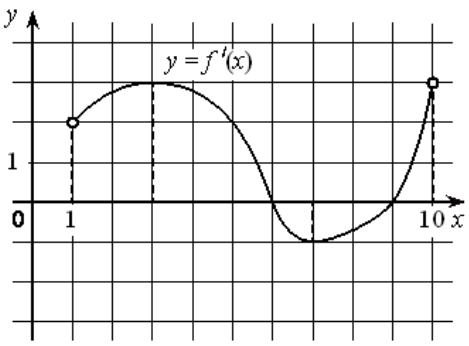
Задание 43. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

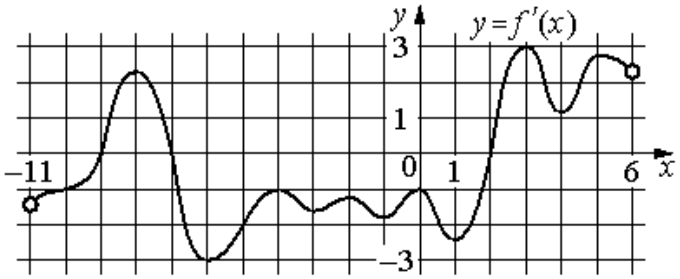
1) 

2) 

Задание 44. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

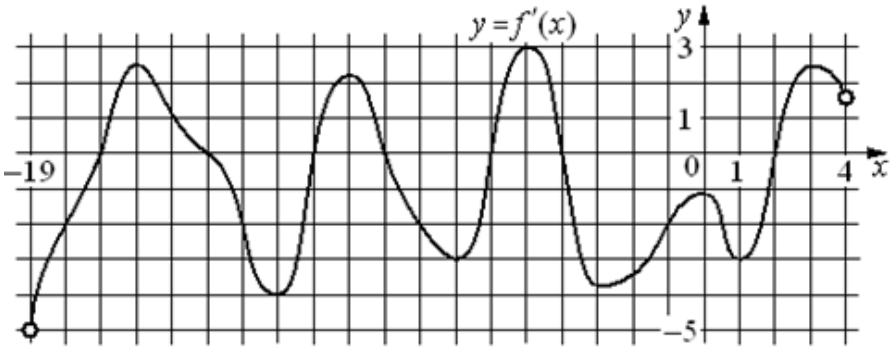
1) 

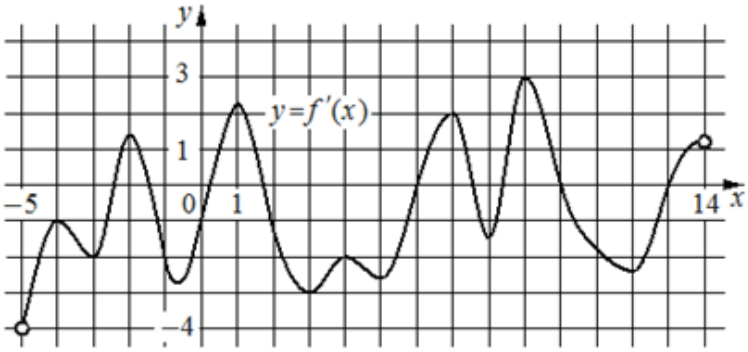
2) 



Задание 45. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.

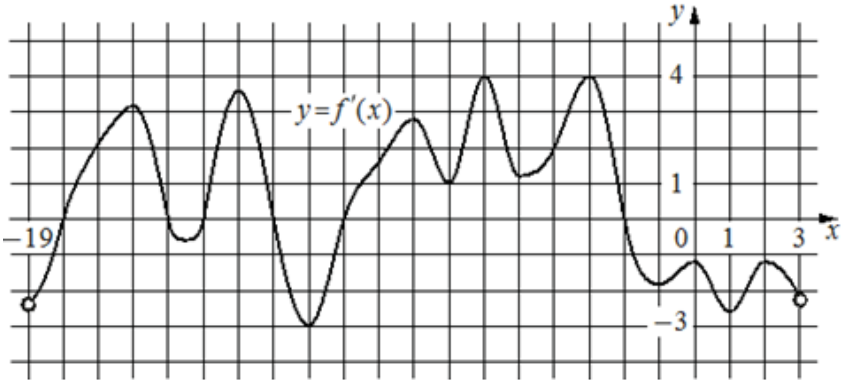
Задание 46. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18; 3]$.

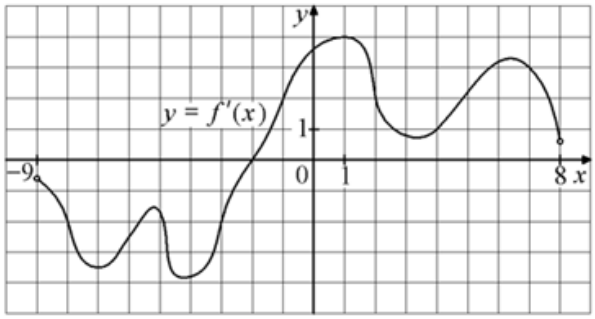




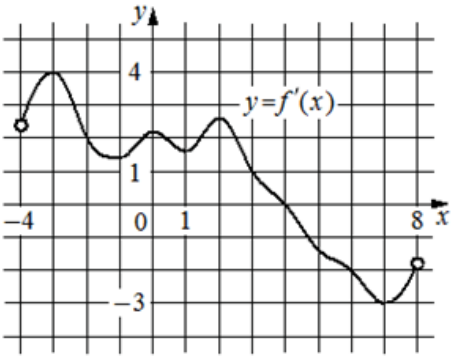
Задание 47. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 9]$.

Задание 48. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; 2]$.

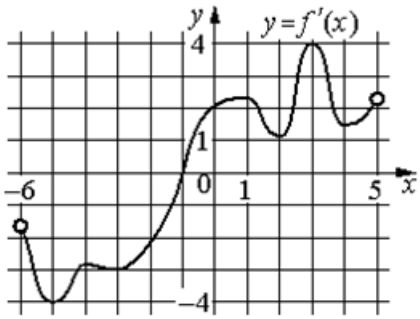




Задание 49. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.

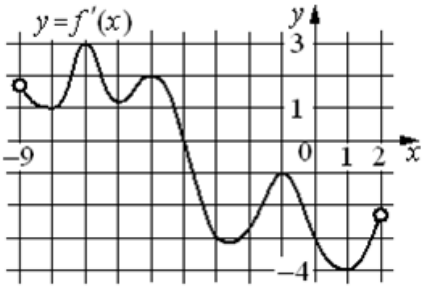


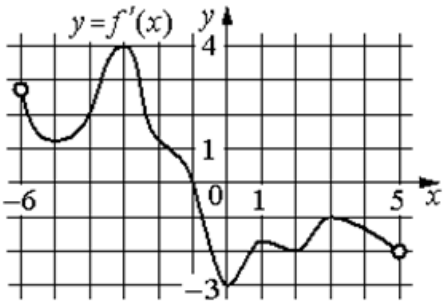
Задание 50. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[1; 6]$.



Задание 51. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

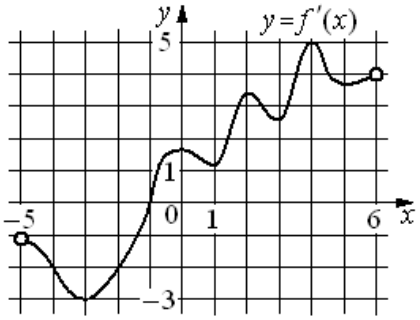
Задание 52. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

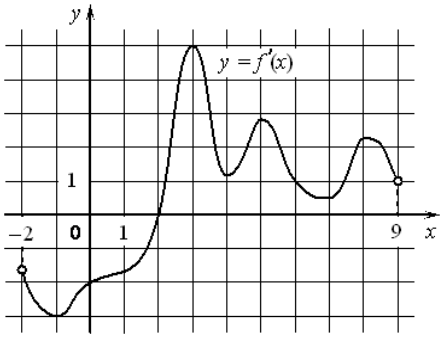




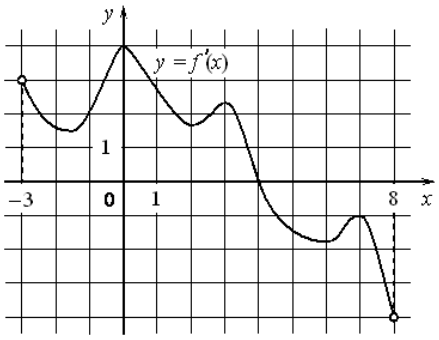
Задание 53. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Задание 54. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

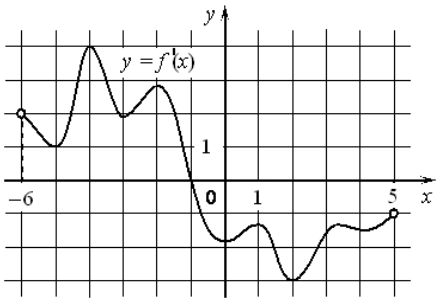




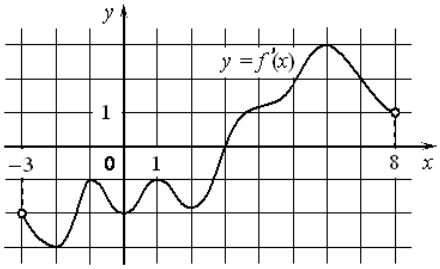
Задание 55. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



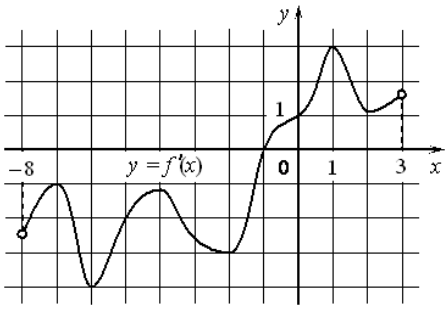
Задание 56. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



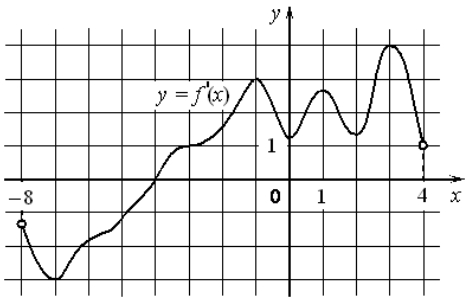
Задание 57. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Задание 58. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

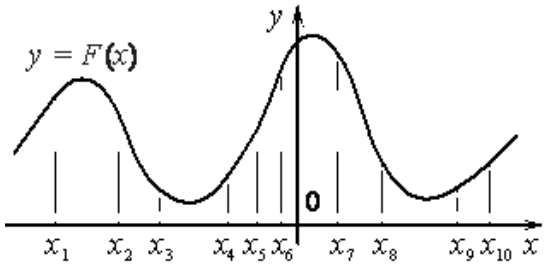


Задание 59. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-6; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

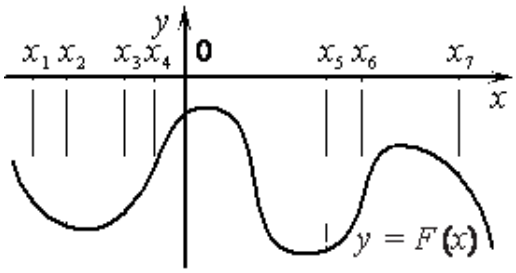


Задание 60. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

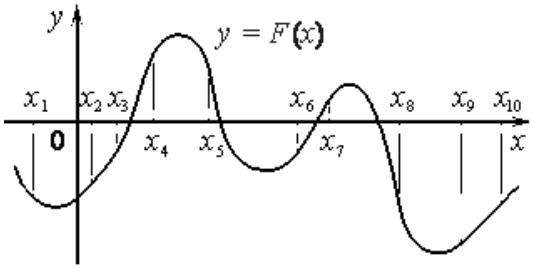
IV) Первообразная



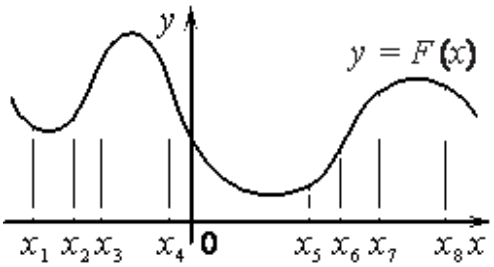
Задание 61. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



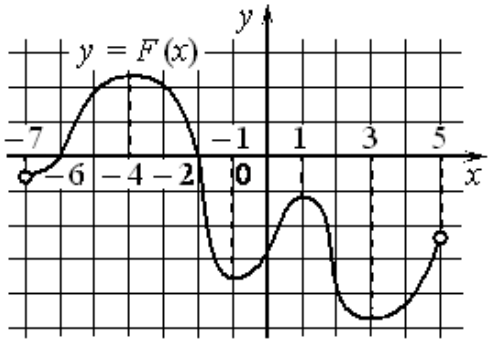
Задание 62. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



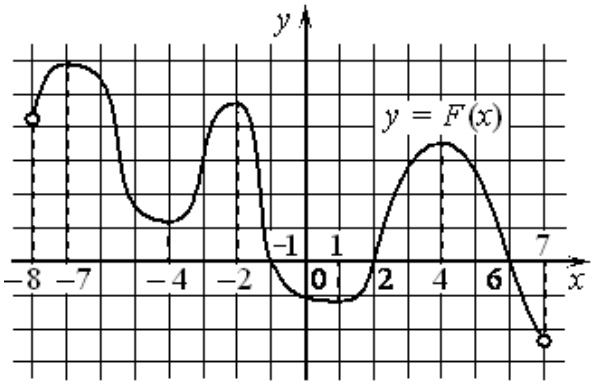
Задание 63. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



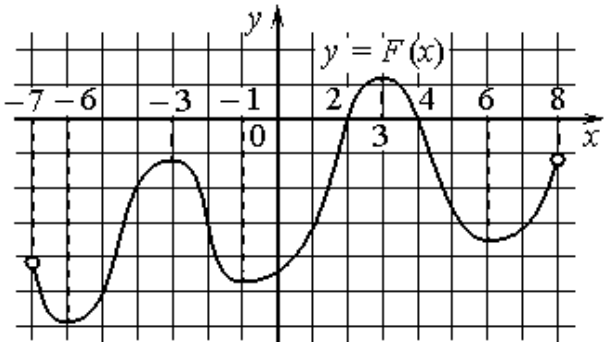
Задание 64. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



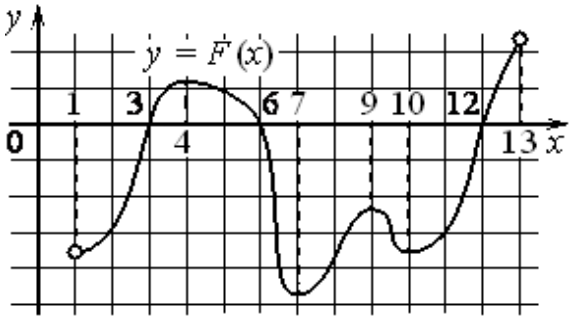
Задание 65. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-5;\ 2]$.



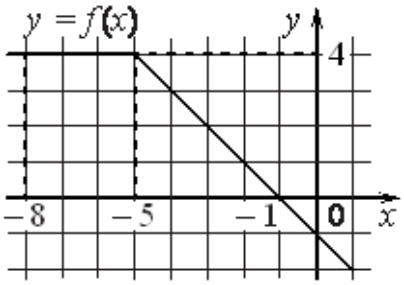
Задание 66. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-5;\ 5]$.



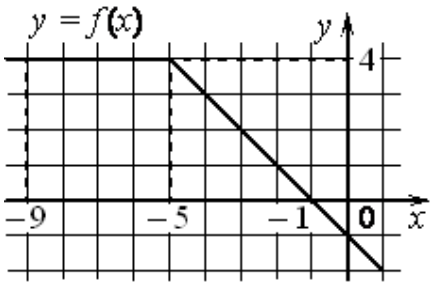
Задание 67. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;8)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[0;5]$.



Задание 68. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(1;13)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[2;11]$.



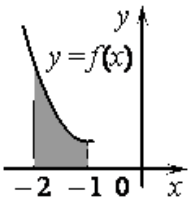
Задание 69. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1)-F(-8)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



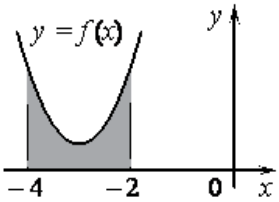
Задание 70. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1)-F(-9)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Задание 71. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры:

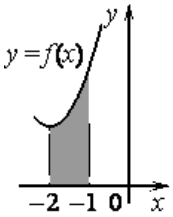
1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+6$



2) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2+14x+8$



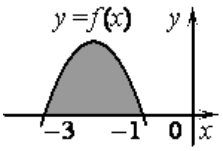
3) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{15}{2}x+\frac{7}{2}$



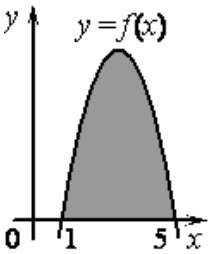
Задание 72. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры:

1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+15x-5$

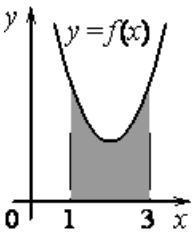
2) $F(x)=-\frac{1}{2}x^3-3x^2-\frac{9}{2}x+3$



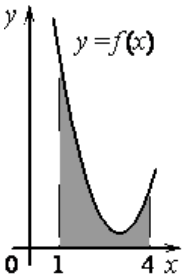
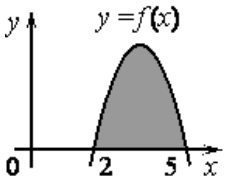
3) $F(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2-\frac{15}{2}x-1$



4) $F(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{15}{2}x-\frac{9}{2}$



5) $F(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+14x-10$



6) $F(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{21}{4}x^2-15x-4$