12. Расчёты по формулам
Блок 1. ФИПИ ПРИМЕРЫ

Задание 1. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C=6000+4100\cdot n$, где n – число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 7 колец.

$n=7$ $\quad C=6000+4100\cdot n$

$C-?$ $\quad C=6000+4100\cdot 7=6000+28700=34700$ (руб.)

Ответ: 34700

Задание 2. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C=150+12\cdot(t-5)$, где t – длительность поездки, выраженная в минутах (t>5). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 11-минутной поездки.

$t=11$ мин $\quad C=150+12\cdot(t-5)$

$C-?$ $\quad C=150+12\cdot(11-5)=150+12\cdot 6=150+72=222$ (руб.)

Ответ: 222

Задание 3. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F=1{,}8t_C+32$, где t_C – градусы Цельсия, t_F – градусы Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -45 градусов по шкале Цельсия?

$t_C=-45$ °C $\quad t_F=1{,}8t_C+32$

$t_F-?$ $\quad t_F=1{,}8\cdot(-45)+32=-81+32=-49$ (°F)

Ответ: –49

Задание 4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C=\frac{5}{9}(t_F-32)$, где t_C – температура в градусах Цельсия, t_F – температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 113 градусов по шкале Фаренгейта?

$t_F=113$ °F

$t_C-?$

$$t_C=\frac{5}{9}(t_F-32)$$

$$t_C=\frac{5}{9}(113-32)=\frac{5}{9}\cdot 81=45\ (°C)$$

Ответ: 45

Задание 5. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P=I^2R$, где I – сила тока (в амперах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 101,25 Вт, а сила тока равна 4,5 А. Ответ дайте в омах.

$P=101{,}25$ Вт

$I=4{,}5$ А

$R-?$

$$P=I^2R \quad \Big|:I^2$$

$$R=\frac{P}{I^2}$$

$$R=\frac{101{,}25}{4{,}5^2}=\frac{101{,}25}{4{,}5\cdot 4{,}5}=\frac{10125}{45\cdot 45}=5\ (Ом)$$

Ответ: 5

Задание 6. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a=\omega^2 R$, где ω – угловая скорость (в с$^{-1}$), а R – радиус окружности. Пользуясь этой формулой, найдите радиус R (в метрах), если угловая скорость равна 7,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 337,5 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

$a=337{,}5$ м/с^2
$\omega=7{,}5$ с$^{-1}$
$R-?$

$$a=\omega^2 R \quad \Big|:\omega^2$$
$$R=\frac{a}{\omega^2}$$
$$R=\frac{337{,}5}{7{,}5^2}=\frac{337{,}5}{7{,}5\cdot 7{,}5}=\frac{3375\cdot 10}{75\cdot 75}=6\ (\text{м})$$

Ответ: 6

Задание 7. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, где d_1 и d_2 – длины диагоналей четырёхугольника, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1=12$, $\sin\alpha=\frac{7}{9}$, а $S=46{,}2$.

$d_1=12$
$\sin\alpha=\frac{7}{9}$
$S=46{,}2$
$d_2-?$

$$S=\frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2} \quad \Big|\cdot 2$$
$$2S=d_1 d_2 \sin\alpha$$
$$d_1 d_2 \sin\alpha=2S \quad \Big|:d_1\sin\alpha$$
$$d_2=\frac{2S}{d_1\sin\alpha}$$
$$d_2=\frac{2\cdot 46{,}2}{12\cdot\frac{7}{9}}=\frac{2\cdot 46{,}2\cdot 9}{12\cdot 7}=\frac{46{,}2\cdot 3}{2\cdot 7}=9{,}9$$

Ответ: 9,9

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

ПРИМЕРЫ

Задание 8. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s=nl$, где n – число шагов, l – длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l=60$ см, $n=1300$? Ответ выразите в километрах.

$n=1300$
$l=60$ см
$s-?$

$$s=nl$$
$$s=1300\cdot 60=78\,000\ (\text{см})$$
$$78\,000\ \text{см}=780\ \text{м}=0{,}78\ \text{км}$$

Ответ: 0,78

Задание 9. Период колебания математического маятника T (в секундах) приближенно можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l – длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 11 секунд.

$T = 11$ с
$l - ?$

$$T = 2\sqrt{l}$$
$$(T)^2 = (2\sqrt{l})^2$$
$$T^2 = 4l \quad \Big| :4$$
$$l = \frac{T^2}{4} \qquad l = \frac{11^2}{4} = \frac{121}{4} = 30\frac{1}{4} = 30\frac{25}{100} = 30{,}25 \text{ (м)}$$

Ответ: 30,25

Задание 10. Закон Кулона можно записать в виде $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F – сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 – величины зарядов (в кулонах), k – коэффициент пропорциональности (в Н·м²/Кл²), а r – расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_2 (в кулонах), если $k = 9\cdot10^9$ Н·м²/Кл², $q_1 = 0{,}008$ Кл, $r = 400$ м, а $F = 0{,}225$ Н.

$k = 9\cdot10^9 \ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$
$q_1 = 0{,}008$ Кл
$r = 400$ м
$F = 0{,}225$ Н
$q_2 - ?$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2$$
$$Fr^2 = kq_1q_2 \quad \Big| : kq_1$$
$$q_2 = \frac{Fr^2}{kq_1} = \frac{0{,}225\cdot400^2}{9\cdot10^9\cdot0{,}008} = \frac{0{,}225\cdot16}{9\cdot10^5\cdot0{,}008} =$$
$$= \frac{225\cdot16}{9\cdot10^5\cdot8} = 0{,}0005 \text{ (Кл)}$$

Ответ: 0,0005

Задание 11. Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F – сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 – массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс (в метрах), а γ – гравитационная постоянная, равная $6.67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг². Пользуясь формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 0{,}64032$ Н, $m_2 = 4\cdot10^9$ кг, а $r = 5$ м.

$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11} \ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$
$F = 0{,}64032$ Н
$m_2 = 4\cdot10^9$ Кл
$r = 5$ м
$m_1 - ?$

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2$$
$$Fr^2 = \gamma m_1 m_2 \quad \Big| : \gamma m_2$$
$$m_1 = \frac{Fr^2}{\gamma m_2} = \frac{0{,}64032\cdot5^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^9} = \frac{0{,}64032\cdot25}{6{,}67\cdot10^{-2}\cdot4} =$$
$$= \frac{0{,}64032\cdot10000}{6{,}67\cdot16} = \frac{64032\cdot10}{667\cdot16} = 60 \text{ (кг)}$$

Ответ: 60

Задание 12. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV=\nu RT$, где P – давление (в паскалях), V – объём (в м^3), ν – количество вещества (в молях), T – температура (в градусах Кельвина), а R – универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К·моль). Пользуясь этой формулой, найдите объём V (в м^3), если $T=300$ К, $P=53\,848{,}8$ Па, $\nu=32{,}4$ моль.

$R=8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$
$T=300$ К
$P=53\,848{,}8$ Па
$\nu=32{,}4$ моль
$V-?$

$$PV=\nu RT \quad |:P$$
$$V=\frac{\nu RT}{P}$$
$$V=\frac{32{,}4\cdot 8{,}31\cdot 300}{53\,848{,}8}$$
$$V=\frac{324\cdot 831\cdot 3}{53\,8488}=\frac{6\cdot 54\cdot 3\cdot 277\cdot 3}{18\cdot 29916}=\frac{54\cdot 3}{108}$$
$$V=1{,}5\ (\text{м}^3)$$

Ответ: 1,5

Задание 13. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV=\nu RT$, где P – давление (в паскалях), V – объём (в м^3), ν – количество вещества (в молях), T – температура (в градусах Кельвина), а R – универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К·моль). Пользуясь формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $P=70\,219{,}5$ Па, $\nu=29{,}9$ моль, $V=2{,}3$ м^3.

$R=8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$
$P=70\,219{,}5$ Па
$\nu=29{,}9$ моль
$V=2{,}3$ м^3
$T-?$

$$\nu RT=PV \quad |:\nu R$$
$$T=\frac{PV}{\nu R}$$
$$T=\frac{70219{,}5\cdot 2{,}3}{29{,}9\cdot 8{,}31}=\frac{702195\cdot 230}{299\cdot 831}=$$
$$=\frac{15\cdot 46813\cdot 23\cdot 10}{23\cdot 13\cdot 3\cdot 277}=\frac{5\cdot 169\cdot 10}{13}=650\ (\text{К})$$

Ответ: 650

12. Расчёты по формулам
Блок 3. Типовые экзаменационные варианты
ПРИМЕРЫ

Задание 14. Высота деревянного стеллажа для книг равна $h=(a+b)n+a$ миллиметров, где a – толщина одной доски (в мм), b – высота одной полки (в миллиметрах), n – число таких полок. Найдите высоту книжного стеллажа из 8 полок, если $a=18$ мм, $b=310$ мм. Ответ выразите в миллиметрах.

$n=8$
$a=18$ мм
$b=310$ мм
$h-?$

$$h=(a+b)n+a$$
$$h=(18+310)\cdot 8+18=328\cdot 8+18=2\,642\ (\text{мм})$$

Ответ: 2642

Задание 15. Закон Гука можно записать в виде $F = kx$, где F – сила (в ньютонах), с которой сжимают пружину, x – абсолютное удлинение (сжатие) пружины (в метрах), а k – коэффициент упругости. Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $F = 80$ Н и $k = 5\ \frac{Н}{м}$.

$F = 80$ Н
$k = 5\ \frac{Н}{м}$
$x - ?$

$F = kx \quad |:k$
$x = \frac{F}{k}$
$x = \frac{80}{5} = 16$ (м)

Ответ: 16

Задание 16. Закон Джоуля–Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q – количество теплоты (в джоулях), I – сила тока (в амперах), R – сопротивление цепи (в омах), а t – время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите время t (в секундах), если $Q = 816{,}75$ Дж, $I = 5{,}5$ А, $R = 9$ Ом.

$Q = 816{,}75$ Дж
$I = 5{,}5$ А
$R = 9$ Ом
$t - ?$

$Q = I^2Rt \quad |:I^2R$
$t = \frac{Q}{I^2R}$
$t = \frac{816{,}75}{5{,}5^2 \cdot 9} = \frac{816{,}75}{5{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 9} = 3$ (сек)

Ответ: 3

Задание 17. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = \frac{U^2}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите P (в ваттах), если $R = 9$ Ом, $U = 18$ В.

$R = 9$ Ом
$U = 18$ В
$P - ?$

$P = \frac{U^2}{R}$
$P = \frac{18^2}{9} = 36$ (Вт)

Ответ: 36

Задание 18. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2t}{R}$, где U – напряжение (в вольтах), R – сопротивление (в омах), t – время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 8$ с, $U = 6$ В, $R = 2$ Ом.

$t = 8$ с
$U = 6$ В
$R = 2$ Ом
$A - ?$

$A = \frac{U^2t}{R}$
$A = \frac{6^2 \cdot 8}{2} = 144$ (Дж)

Ответ: 144

Задание 19. Кинетическая энергия тела (в джоулях) вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m – масса тела (в килограммах), а v – его скорость (в метрах в секунду). Пользуясь этой формулой, найдите E (в джоулях), если $v=5$ м/с и $m=12$ кг.

$v=5$ м/с
$m=12$ кг
E – ?

$E=\frac{mv^2}{2}$ $\quad E=\frac{12\cdot5^2}{2}=150$ (Дж)

Ответ: 150

Задание 20. Энергия заряженного конденсатора W (в Дж) вычисляется по формуле $W=\frac{CU^2}{2}$, где C – ёмкость конденсатора (в Ф), а U – разность потенциалов на обкладках конденсатора (в В). Найдите энергию конденсатора W (в Дж) ёмкостью 10^{-4} Ф, если разность потенциалов U на обкладках конденсатора равна 8 В.

$C=10^{-4}$ Ф
$U=8$ В
W – ?

$W=\frac{CU^2}{2}$ $\quad W=\frac{10^{-4}\cdot8^2}{2}=0{,}0032$ (Дж)

Ответ: 0,0032

Задание 21. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{abc}{4R}$, где a, b и c – стороны треугольника, а R – радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите S, если $a=11$, $b=13$, $c=20$ и $R=\frac{65}{6}$.

$a=11$
$b=13$
$c=20$
$R=65/6$
S – ?

$S=\frac{abc}{4R}$

$S=\frac{11\cdot13\cdot20}{4\cdot\frac{65}{6}}=\frac{11\cdot13\cdot5\cdot6}{65}=66$

Ответ: 66

Задание 22. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно найти по формуле $r=\frac{a+b-c}{2}$, где a и b – катеты, а c – гипотенуза треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите c, если $a=12$, $b=35$ и $r=5$.

$a=12$
$b=35$
$r=5$
c –?

$r=\frac{a+b-c}{2}\ \Big|\cdot2$

$2r=a+b-c$

$c=a+b-2r$ $\quad c=12+35-2\cdot5=37$

Ответ: 37

Задание 23. Теорему косинусов можно записать в виде $\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, где a, b и c – стороны треугольника, а α – угол между сторонами a и b. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos\alpha$, если $a=3$, $b=8$ и $c=7$.

$a=3$
$b=8$
$c=7$
$\cos\alpha$ –?

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos\alpha = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

Задание 24. Длина медианы m_c, проведённой к стороне с треугольника со сторонами a, b и c, вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c, если $a=4$, $b=7$ и $c=9$.

$a=4$
$b=7$
$c=9$
m_c –?

$$m_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2\cdot4^2+2\cdot7^2-9^2}}{2} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Ответ: 3,5

Задание 25. Длина биссектрисы l_c, проведённой к стороне с треугольника со сторонами a, b и c, вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}$. Найдите длину биссектрисы l_c, если $a=7$, $b=21$ и $c=26$.

$a=7$
$b=21$
$c=26$
l_c –?

$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}$$

$$l_c = \frac{1}{7+21}\sqrt{7\cdot21\cdot((7+21)^2-26^2)} =$$

$$= \frac{1}{28}\sqrt{7\cdot21\cdot108} = \frac{1}{28}\sqrt{7\cdot7\cdot3\cdot3\cdot36} = \frac{1}{28}\cdot126 = 4{,}5$$

Ответ: 4,5

Задание 26. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где b и c – две стороны треугольника, а α – угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите $\sin\alpha$, если $b=10$, $c=5$ и $S=20$.

$b=10$
$c=5$
$S=20$
$\sin\alpha$ –?

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \Big|\cdot2$$

$$2S = bc\sin\alpha \quad \Big|:bc$$

$$\sin\alpha = \frac{2S}{bc} \qquad \sin\alpha = \frac{2\cdot20}{10\cdot5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Ответ: 0,8

Задание 27. Радиус описанной около треугольника окружности можно найти по формуле $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, где a – сторона треугольника, α – противолежащий этой стороне угол, а R – радиус описанной около этого треугольника окружности. Пользуясь этой формулой, найдите R, если $a=7$, а $\sin\alpha=\frac{5}{14}$.

$a=7$

$\sin\alpha=\frac{5}{14}$

$R-?$

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R=\frac{7}{2\cdot\frac{5}{14}}=\frac{7\cdot14}{2\cdot5}=\frac{98}{10}=9{,}8$$

Ответ: 9,8

Задание 28. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, где a и b – две стороны треугольников, а α и β – углы треугольника, лежащие против них соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите величину a, если $b=15$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\sin\beta=\frac{12}{13}$.

$b=15$

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin\beta=\frac{12}{13}$

$a-?$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \quad \Big|:\sin\beta$$

$$a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a=\frac{15\cdot\frac{4}{5}}{\frac{12}{13}}=\frac{3\cdot4\cdot13}{12}=13$$

Ответ: 13

Задание 29. Площадь прямоугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{d^2\sin\alpha}{2}$, где d – длина диагонали, α – угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, $d=12$ и $\sin\alpha=\frac{5}{6}$.

$d=12$

$\sin\alpha=\frac{5}{6}$

$S-?$

$$S=\frac{d^2\sin\alpha}{2}$$

$$S=\frac{12^2\cdot\frac{5}{6}}{2}=\frac{12\cdot2\cdot5}{2}=60$$

Ответ: 60